Algorithms and Probability

Week 6

G09 - mkilic

26.III.2026

Overview

Roadmap

1. Graphentheorie
   - Zusammenhang
   - Kreise
   - Matchings
   - Färbungen
2. W'keitstheorie
   - Bedingte W'keit
   - Unabhängigkeit
   - (mehrere) Zufallsvariablen
   - Diskrete Verteilungen
   - Abschätzen von W'keiten
   - Randomisierte Algorithmen
3. Algorithmen
   - Lange-Bunte Pfade
   - MaxFlow
   - MinCut
   - Kleinster umschliessender Kreis
   - Konvexe Hülle

Minitest

Passwort: probability

RECAP: Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit

A und B seien Ereignisse mit $Pr[B] > 0$. Die *bedingte Wahrscheinlichkeit* $Pr[A \mid B]$ von A gegeben B ist definiert durch

$$Pr[A \mid B] := \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]}$$

[0] *Engl. Conditional Probability, $Pr[A|B]$:= probability of A given B*

RECAP: Eigenschaften von Bedingte W'keiten

1. $Pr[B \mid B] = 1$ und $Pr[B \mid \bar{B}] = 0$
2. $Pr[A \mid \Omega] = Pr[A]$
3. Die Bedingten W'keiten der Form $Pr[\cdot \mid E]$ bilden für $E \subseteq \Omega$ und $Pr[E] > 0$ einen neuen W'keitsraum über Ω (Es verhält sich also wie die Funktion $Pr[\cdot]$ z.B. $Pr[A \mid B] = 1 - Pr[\bar{A} \mid B]$)

Multiplikationssatz I

Nur eine kleine Umformung von $Pr[A \mid B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{Pr[B]}$ ergibt

$$Pr[A \cap B] = Pr[B \mid A] \cdot Pr[A] = Pr[A \mid B] \cdot Pr[B]$$

Multiplikationssatz

Seien die Ereigisse $A_1, \ldots A_n$ gegeben. Falls $Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_n] > 0$ ist, gilt

$$Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_n] = Pr[A_1] \cdot Pr[A_2 \mid A_1] \cdot Pr[A_3 \mid A_1 \cap A_2] \cdots Pr[A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}]$$

Multiplikationssatz II

Intuition: *Um auszurechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit A und B zugleich eintreten, genügt es, die Wahrscheinlichkeiten zu multiplizieren, dass zunächst A eintritt und dann noch B unter der Bedingung, dass A schon eingetreten ist.*

Beweis: Zunächst halten wir fest, dass dieser Ausdruck wohldefiniert ist:
$Pr[A_1] \geq Pr[A_1 \cap A_2] \geq \cdots \geq Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_n] > 0$

$$\frac{Pr[A]}{1} \cdot \frac{Pr[A_1 \cap A_2]}{Pr[A_1]} \cdot \frac{Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3]}{Pr[A_1 \cap A_2]} \cdots \frac{Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_n]}{Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}]} = Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_n]$$

$\square$

Geburtstagsproblem I

Problem: Geburtstagsproblem

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer m-köpfigen Gruppe zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben?

Geburtstagsproblem I

Problem: Geburtstagsproblem

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer m-köpfigen Gruppe zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben?

Umformulieren: *Man werfe m Bälle zufällig und gleich wahrscheinlich in* $n = 365$ *Körbe. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Experiment jeder Ball allein in seinem Korb liegt?*

$A_i :=$ *„Ball i landet in einem noch leeren Korb"*
Gesucht ist $Pr[A] = Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_m]$
Multiplikationssatz anwenden:

Geburtstagsproblem I

Problem: Geburtstagsproblem

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer m-köpfigen Gruppe zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben?

Umformulieren: *Man werfe m Bälle zufällig und gleich wahrscheinlich in* $n = 365$ *Körbe. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Experiment jeder Ball allein in seinem Korb liegt?*

$A_i :=$ *„Ball i landet in einem noch leeren Korb"*
Gesucht ist $Pr[A] = Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_m]$
Multiplikationssatz anwenden:

$$P[A] = Pr[\cap_{i=1}^{m} A_i] = Pr[A_1] \cdot Pr[A_2 \mid A_1] \cdot Pr[A_3 \mid A_1 \cap A_2] \cdots Pr[A_m \mid \cap_{i=1}^{m-1} A_i]$$

Geburtstagsproblem II

Problem: Geburtstagsproblem

$Pr[A_j \mid \cap_{i=1}^{j-1} A_i]$ bezeichnet die W'keit, dass der j-te Ball in einem leeren Korb landet, wenn bereits die vorherigen $j-1$ Bälle jeweils allein in einem Korb gelandet sind.

$$Pr[A_j \mid \cap_{i=1}^{j-1} A_i] = \frac{n-(j-1)}{n} = 1 - \frac{j-1}{n}$$

$$Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_m] = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{(m-1)}{n}\right)$$

Man kann die Ungleichung $1 - x \leq e^{-x}$ benutzen und zeigen dass

$$Pr[A] \leq e^{-m(m-1)/(2n)}$$

Satz von der totalen W'keit

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ seien paarweise disjunkt und es gelte $B \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Dann folgt

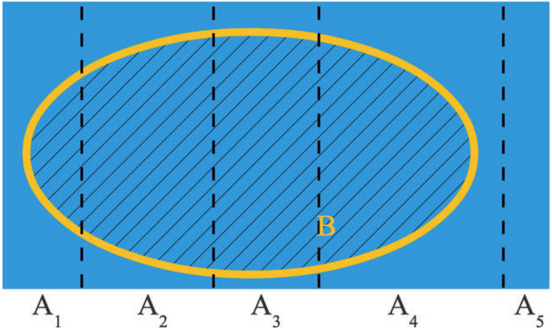
$$Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} Pr[B \mid A_i] \cdot Pr[A_i]$$

Analog gilt für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, dass

$$Pr[B] = \sum_{i=1}^{\infty} Pr[B \mid A_i] \cdot Pr[A_i]$$

Beweis: Folgt aus $B = (B \cap A_1) \cup \cdots \cup (B \cap A_n)$ und $Pr[B \cap A_i] = Pr[B \mid A_i] \cdot Pr[A_i]$
Weil $(B \cap A_i)$ disjunkt sind, kann man Additionssatz anwenden.

Satz von der totalen W'keit



Monty Hall Problem

Problem: Monty Hall Problem

"Die Kandidatin einer Fernsehshow darf zwischen drei Türen wählen, um ihren Gewinn zu ermitteln. Hinter einer davon befindet sich ein teures Auto, während hinter den beiden anderen als Trostpreis jeweils eine Ziege wartet. Um die Spannung zu steigern, öffnet der Showmaster, nachdem die Kandidatin gewählt hat, eine der beiden übrigen Türen, hinter der sich (wie er weiss) eine Ziege befindet, und bietet der Kandidatin an, die Tür noch einmal zu wechseln. Würden Sie an ihrer Stelle dieses Angebot annehmen?"

Monty Hall Problem

Problem: Monty Hall Problem

"Die Kandidatin einer Fernsehshow darf zwischen drei Türen wählen, um ihren Gewinn zu ermitteln. Hinter einer davon befindet sich ein teures Auto, während hinter den beiden anderen als Trostpreis jeweils eine Ziege wartet. Um die Spannung zu steigern, öffnet der Showmaster, nachdem die Kandidatin gewählt hat, eine der beiden übrigen Türen, hinter der sich (wie er weiss) eine Ziege befindet, und bietet der Kandidatin an, die Tür noch einmal zu wechseln. Würden Sie an ihrer Stelle dieses Angebot annehmen?"

Seien

- $A :=$ „Kandidatin hat bei der ersten Wahl das Auto gewählt"
- $G :=$ „Kandidatin gewinnt nach dem Wechseln der Tür"

Die Frage ist jetzt $Pr[G] =?$

Monty Hall Porblem

Problem: Monty Hall Problem

$Pr[G \mid A] = 0$ und $Pr[G \mid \bar{A}] = 1$ *(Warum?)*
Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit haben wir:

$$Pr[G] = Pr[G \mid A] \cdot Pr[A] + Pr[G \mid \bar{A}] \cdot Pr[\bar{A}] = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Es ist also clever, die Tür zu wechseln.

Satz von Bayes

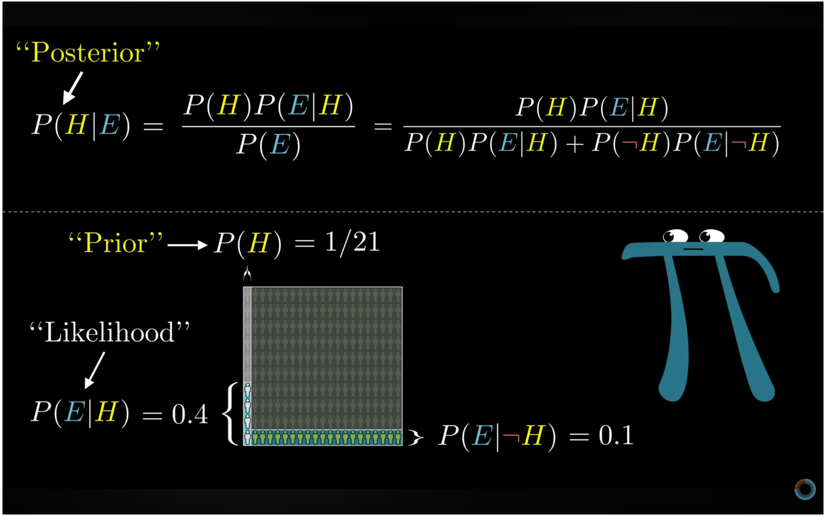
Satz von Bayes

Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ seien paarweise disjunkt. Ferner sei $B \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$ ein Ereignis mit $Pr[B] > 0$. Dann gilt für ein beliebiges $i = 1, \ldots, n$

$$Pr[A_i \mid B] = \frac{Pr[A_i \cap B]}{Pr[B]} = \frac{Pr[B \mid A_i] \cdot Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{n} Pr[B \mid A_j] \cdot Pr[A_j]}$$

Man kann mit Hilfe von Satz von Bayes die Reihenfolge der Bedingung umdrehen.

Satz von Bayes: Intuition



3Blue1Brown video for Bayes: https://www.youtube.com/watch?v=HZGCoVF3YvM

Exercise: Probability Space

(a) For each of the following subtasks, either define a probability space and events A and B (and C) with the described properties, or prove that such a space cannot exist. Make sure that you define both, the sample space ("Ergebnismenge") Ω and the probabilities of the atomic events ("Elementarereignisse").

(i) $\Pr[A] = \frac{1}{4}$, $\Pr[B] = \frac{1}{3}$ and $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B]$.

(ii) $\Pr[A] = \frac{1}{4}$, $\Pr[B] = \frac{1}{3}$ and $\Pr[A \cup B] < \Pr[A] + \Pr[B]$.

(iii) $\Pr[A] = \Pr[B]$, $\Pr[A \cap B] = \frac{1}{4}$, and $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$ (that is A and B are independent).

(iv) $\Pr[A] = \Pr[B] = \Pr[C] = \frac{5}{6}$ and $\Pr[A \cap B \cap C] = 0$.

Exercise: Probability Space II

(b) Samantha has a fair, six-sided die and a 5 CHF coin. She rolls the die and tosses the coin. Samantha considers her experiment a success if the coin shows a strictly larger value than the die (for the coin, heads is counted as 0; tails is counted as 5). Model her experiment with a suitable probability space. Explicitly define the event A that the experiment is a success and determine its probability $\Pr[A]$.

Exercise: Probability Space III

(c) Oliver owns three pairs of shoes – two blue pairs, and one yellow, which he stores unordered in his wardrobe. One morning, during a power outage, he has to put on his shoes in complete darkness. He randomly (uniformly at random) grabs two shoes from the wardrobe and tries to put them on.

We let A denote the event that he picked one left shoe and one right shoe (i.e. he is able to put on the shoes he picked), and we let B be the event that the two shoes he picked have the same color.

Model this setting as a probability space and compute $\Pr[A]$ and $\Pr[A|B]$.

Unabhängigkeit

Unabhängigkeit

Die Ereignisse A und B heissen *unabhängig*, wenn gilt

$$Pr[A \cap B] = Pr[A] \cdot Pr[B]$$

Unabhängigkeit

Unabhängigkeit

Die Ereignisse A und B heissen *unabhängig*, wenn gilt

$$Pr[A \cap B] = Pr[A] \cdot Pr[B]$$

Intuition: Ob B auftritt, hat keinen Einfluss auf die W'keit von A.
Die Ereignisse müssen nicht physikalisch getrennt sein, um stochastisch unabhängig zu sein. (z.B. „Summe der Augenzahlen von zwei Würfe beträgt 7")

Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse

Definition 2.22.

Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ heissen *unabhängig*, wenn für alle Teilmengen $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ gilt, dass

$$\Pr[A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdots \Pr[A_{i_k}].$$

Eine unendliche Familie von Ereignissen A_i mit $i \in \mathbb{N}$ heisst unabhängig, wenn die obige Gleichung für jede endliche Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse

Lemma 2.23.

Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ sind genau dann unabhängig, wenn für alle $(s_1, \ldots, s_n) \in \{0,1\}^n$ gilt, dass

$$\Pr[A_1^{s_1} \cap \cdots \cap A_n^{s_n}] = \Pr[A_1^{s_1}] \cdots \Pr[A_n^{s_n}],$$

wobei $A_i^0 = \bar{A}_i$ und $A_i^1 = A_i$.

Eigenschaften - Unabhängigkeit

Seien A, B und C unabhängige Ereignisse. Dann gilt:

- $\bar{A}$ und B
- A und $\bar{B}$
- $\bar{A}$ und $\bar{B}$
- $A \cup B$ und C
- $A \cap B$ und C

sind alle unabhängige Ereignisse.

Zufallsvariablen

Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable ist ein Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$, wobei Ω die Ergebnismenge eines Wahrscheinlichkeitsraumes ist.

Wir bezeichnen mit W_X den Wertebereich einer Zufallsvariable:

$$W_X := X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega \text{ mit } X(\omega) = x\}$$

[0] *Engl. Zufallsvaroable : Random Variable*

Dichte- und Verteilungsfunktion

Dichtefunktion:

$$f_X : \mathbb{R} \to [0,1], x \mapsto Pr[X = x]$$

Verteilungsfunktion

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1], x \mapsto Pr[X \leq x]$$

wobei wir haben

$$Pr[X \leq y] = \sum_{x \in W_x : x \leq y} Pr[X = x] = Pr[\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq y\}]$$

Dichte- und Verteilungsfunktion

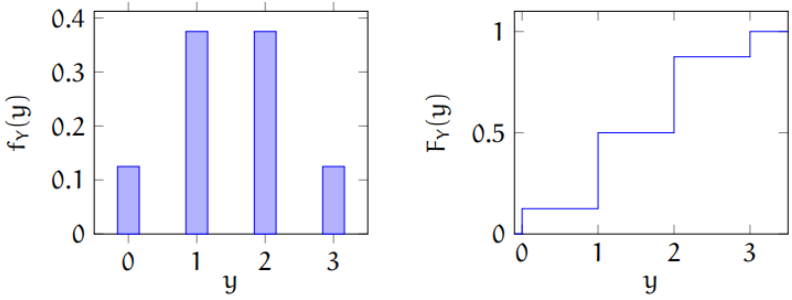


Abbildung 2.3: Dichte- und Verteilungsfunktion von Y.

Erwartungswert

Erwartungswert

Zu einer Zufallsvariablen X definieren wir den *Erwartungswert* $\mathbb{E}[X]$ durch

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x],$$

sofern die Summe absolut konvergiert. Ansonsten sagen wir, dass der Erwartungswert undefiniert ist.

Erwartugswert

Erwartungswert-2

Ist X eine Zufallsvariable, so gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot Pr[\omega]$$

Erwartugswert

Erwartungswert-3

Ist X eine Zufallsvariable mit $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} Pr[X \geq i]$$

Beweis. Nach Definition gilt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr[X = i] = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{i} \Pr[X = i]$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=j}^{\infty} \Pr[X = i] = \sum_{j=1}^{\infty} \Pr[X \geq j].$$

□

Linearität des Erwartungswerts

Der Erwartungswert einer Summe von Zufallsvariablen ist die Summe der Erwertungswerte der Zufallsvariablen.

Linearität des Erwartungswerts

Linearität des Erwartungswerts

Satz 2.33. *(Linearität des Erwartungswerts)* Für Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ und $X := a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n + b$ mit $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + \cdots + a_n \mathbb{E}[X_n] + b.$$

Indikatorvariablen

Indikatorvariablen

Für ein Ereignis $A \subseteq \Omega$ ist die zugehörige Indikatorvariable X_A definiert durch:

$$X_A(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Für den Erwartungswert von X_A gilt: $\mathbb{E}[X_A] = Pr[A]$

Indikatorvariablen - II

Indikatorvariable $I_A(\omega) := \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$

- Schnitt von zwei Indikatorvariablen I_A, I_B:

$$I_{A \cap B} = I_A \cdot I_B$$

Das Produkt von Indikatorvariablen ist ebenfalls eine Indikatorvariable, nämlich der Indikator für den Schnitt der beteiligten Ereignisse.

Indikatorvariablen - II

Indikatorvariable $I_A(\omega) := \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$

- Schnitt von zwei Indikatorvariablen I_A, I_B:

$$I_{A \cap B} = I_A \cdot I_B$$

Das Produkt von Indikatorvariablen ist ebenfalls eine Indikatorvariable, nämlich der Indikator für den Schnitt der beteiligten Ereignisse.

- Komplement von einer Indikatorvariable I_A:

$$I_{\bar{A}} = 1 - I_A$$

Indikatorvariablen - II

Indikatorvariable $I_A(\omega) := \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$

- Schnitt von zwei Indikatorvariablen I_A, I_B:

$$I_{A \cap B} = I_A \cdot I_B$$

Das Produkt von Indikatorvariablen ist ebenfalls eine Indikatorvariable, nämlich der Indikator für den Schnitt der beteiligten Ereignisse.

- Komplement von einer Indikatorvariable I_A:

$$I_{\bar{A}} = 1 - I_A$$

- Vereinigung von zwei Indikatorvariablen $I_A und I_B$:

$$I_{A \cup B} \rightarrow Siebformel$$

Randomisiertes Quicksort

```
        if  < r then
            p ← Uniform({ℓ, ℓ + 1, ..., r})
            t ← PARTITION(A,ℓ,r,p)
            QUICKSORT(A,ℓ,t − 1)              \\Block I
            QUICKSORT(A,t + 1,r)              \\Block II
```

Quicksort

Wir sind interessiert für Laufzeit. Sie ist von der Anzahl der Vergleiche bestimmt.

Randomisiertes Quicksort

Definiere: $X_{i,j}$:= *Indikatorvariable für "a_i wird mit a_j verglichen"*

- Pivotelement wird mit allen anderen Elementen im selben Block verglichen. Sonst gibt es keine Vergleiche und das Pivotelement ist danach in keinem Block mehr.
- Damit das Paar (a_i, a_j) verglichen werden können, muss einer der beiden als Pivotelement gewählt werden. Jedes Paar wird maximal einmal verglichen.

Randomisiertes Quicksort

Definiere: $X_{i,j}$:= *Indikatorvariable für "a_i wird mit a_j verglichen"*

- Pivotelement wird mit allen anderen Elementen im selben Block verglichen. Sonst gibt es keine Vergleiche und das Pivotelement ist danach in keinem Block mehr.
- Damit das Paar (a_i, a_j) verglichen werden können, muss einer der beiden als Pivotelement gewählt werden. Jedes Paar wird maximal einmal verglichen.

$$X = \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_{i,j}$$

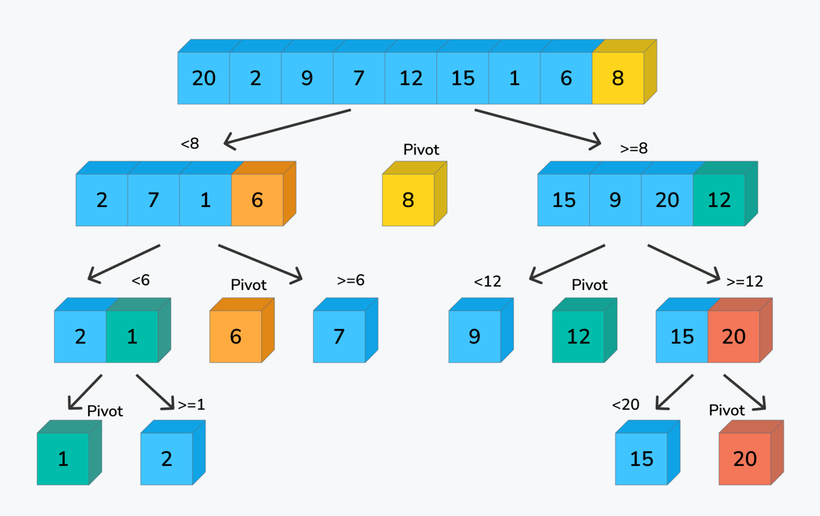
Für ein Paar (a_i, a_j) gibt es zwei Möglichkeiten:

1. a_i oder a_j wird als Pivot gewählt: $X_{i,j} = 1$ mit W'keit $\frac{2}{j-i+1}$
2. Einer von $a_{i+1}, \ldots a_{j-1}$ wird gewählt: $X_{i,j} = 0$

Also haben wir: $\mathbb{E}[X_{i,j}] = Pr[X_{i,j} = 1] = \frac{2}{j-i+1}$

$$\mathbb{E}[X] \overset{lin.}{=} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}[X_{i,j}] = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{2}{j-i+1} \cdots \leq 2n \ln(n)$$

Randomisiertes Quicksort



The End

♠