Algorithms and Probability

Week 3

G08 - mkilic

6.III.2025

Overview

Roadmap

1. Graphentheorie
   - Zusammenhang
   - Kreise
   - Matchings
   - Färbungen

2. W'keitstheorie
   - Bedingte W'keit
   - Unabhängigkeit
   - (mehrere) Zufallsvariablen
   - Diskrete Verteilungen
   - Abschätzen von W'keiten
   - Randomisierte Algorithmen

3. Algorithmen
   - Lange-Bunte Pfade
   - MaxFlow
   - MinCut
   - Kleinster umschliessender Kreis
   - Konvexe Hülle

Matchings

Matchings

Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ heisst **Matching** in einem Graphen $G = (V, E)$, falls kein Knoten des Grahen zu mehr als einer Kante aus M inzident ist.
Formal heisst das: $e \cap f = \emptyset$ für alle $e, f \in M$ mit $e \neq f$

[0] Engl. *überdeckt: matched*

Matchings

Matchings

Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ heisst **Matching** in einem Graphen $G = (V, E)$, falls kein Knoten des Grahen zu mehr als einer Kante aus M inzident ist.
Formal heisst das: $e \cap f = \emptyset$ für alle $e, f \in M$ mit $e \neq f$

- Matching ist eine Menge von Kanten ohne gemeinsame Knoten.
- Ein Knoten v wird von M **überdeckt**, falls es eine Kante $e \in M$ gibt, die v enthält.
- M heisst **perfektes Matching** wenn jeder Knoten durch genau eine Kante aus M überdeckt wird. Äquivalent ist $|M| = |V|/2$

[0] Engl. *überdeckt: matched*

Maximalität

Inklusionsmaximal

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und M ein matching in G:

M heisst *inklusionsmaximal*, falls gilt $M \cup \{e\}$ ist kein Matching für alle Kanten $e \in E \setminus M$

[0]Engl. *inklusionsmaximales Matching : maximal Matching*

Maximalität

Inklusionsmaximal

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und M ein matching in G:

M heisst *inklusionsmaximal,* falls gilt $M \cup \{e\}$ ist kein Matching für alle Kanten $e \in E \setminus M$

Äquivalent sind:

- Man kann keine Kante mehr hinzufügen ohne die Matching Eigenschaft zu zerstören.
- Es existiert kein Matching M' mit $M \subseteq M'$ und $|M'| > |M|$
- Mit den Kanten, die ich zurzeit im Matching habe, geht es nicht besser
- Jede Kante muss mindestens eine Kante in M berühren.

[0]Engl. *inklusionsmaximales Matching : maximal Matching*

Maximalität

Kardinalitätsmaximal

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und M ein matching in G:

M heisst *kardinalitätsmaximal*, falls gilt $|M| \geq |M'|$ für alle Matchings M' in G.

- Es gibt kein Matching, das mehr Kanten enthält als M.
- Es geht nicht besser.

[0] En *inklusionsmax. Matching : maximal Matching, kardinalitätsmax. Matching : maximum Matching*

Maximalität

Ein kardinalitätsmaximales Matching ist **immer** auch inklusionsmaximal.

Kardinalitätsmaximales Matching auch inklusionsmaximal

Ein inklusionsmaximales Matching muss nicht unbedingt kardinalitätsmaximal sein.

Inklusionsmaximales Matching, nicht kardinalitätsmaximal

Greedy Algorithmus

Greedy

Mit dem *Greedy Alogrithmus* kann man in Zeit $0(|E|)$ ein inklusionsmaximales Matching M_{greedy} bestimmen mit:

$$M_{greedy} \geq \frac{|M_{max}|}{2}$$

wobei M_{max} ein kardinalitätsmaximales Matching ist.

```
M ← ∅
while E ≠ ∅ do
    waehle eine beliebige Kante e ∈ E
    M ← M ∪ {e}
    loesche e und alle inzidenten Kanten in G

```

Greedy-Matching(G)

Greedy Algorithmus

Beweis von der Box:

1. Greedy findet inklusionsmaximales Matching per konstruktion. (Lösche inzidente Kanten, do while $E \neq \emptyset$)
2. Jede Kante aus M_{max} muss mindestens einen Endpunkt in M_{inc} haben, da sie sonst zu M_{inc} hinzugefügt werden könnte.
3. Da M_{max} ein Matching ist, kann jeder von diesen Endpunkten nur eine Kante in M_{max} berühren.
4. Also gibt es mindestens so viele Endpunkte in M_{inc} wie es Kanten in M_{max} gibt:

$$|M_{max}| \leq |\text{Endpunkte in } M_{inc}| = 2 \cdot |M_{inc}|$$

[0] Man kann statt M_{inc} auch M_{greedy} schreiben weil M_{greedy} ein inkl.max. Matching ist.

Satz von Hall a.k.a. Der Heiratssatz

Satz von Hall

Für einen bipartiten Graphen $G = (A \uplus B, E)$ gibt es **genau dann** ein Mathcing M der Kardinalität $|M| = |A|$, **wenn** gilt

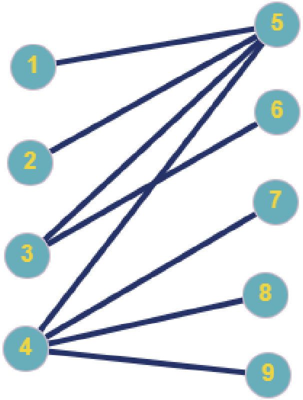
$$|N(X)| \geq X \text{ für alle } X \subseteq A$$

Wir definieren dabei die Nachbarschaft einer Knotenmenge $X \subseteq V$ als:

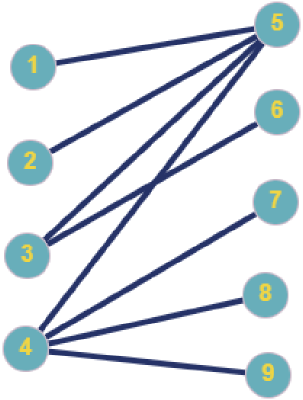
$$N(X) = \bigcup_{v \in X} N(v)$$

[0]Achtung! Dieser Satz gilt in beide Richtungen: $\exists M. |M| = |A| \iff |N(X)| \geq X$ für alle $X \subseteq A$

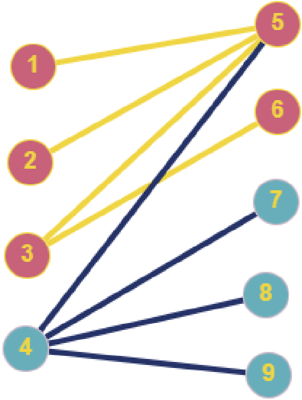
Satz von Hall - Beispiel



Satz von Hall - Beispiel

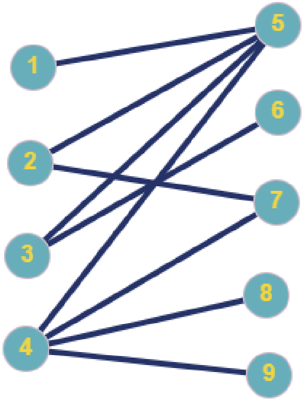


$X = \{1,2,3\} \subseteq A$

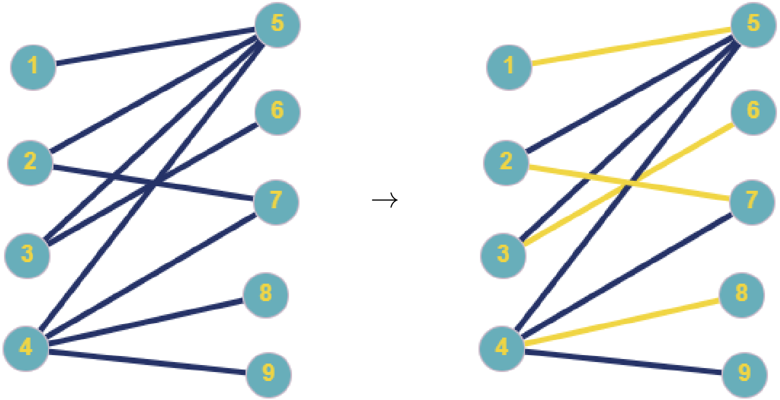


Kein Matching der Grösse von $|A| = |\{1, 2, 3, 4\}|$.

Satz von Hall - Beispiel



Satz von Hall - Beispiel



$\{\{1,5\},\{2,7\},\{3,6\},\{4,8\}\}$ ist ein Matching der Grösse von $|A| = |\{1,2,3,4\}|$.

Satz von Hall - Beweis

Satz von Hall: $\exists M. |M| = |A| \iff |N(X)| \geq X$ für alle $X \subseteq A$

Satz von Hall - Beweis

Satz von Hall: $\exists M. |M| = |A| \iff |N(X)| \geq X$ für alle $X \subseteq A$

($\Rightarrow$): Wir zeigen, falls es ein Matching M mit $|M| = |A|$ existiert, dann gilt $|N(X)| \geq X$ für alle $X \subseteq A$.

Satz von Hall - Beweis

Satz von Hall: $\exists M.|M| = |A| \iff |N(X)| \geq X$ für alle $X \subseteq A$

($\Rightarrow$): Wir zeigen, falls es ein Matching M mit $|M| = |A|$ existiert, dann gilt $|N(X)| \geq X$ für alle $X \subseteq A$.

Sei jeztz M ein Matching Kardinalität $|M| = |A|$. In dem durch M gegebenen Teilgraphen $H = (A \uplus B, M)$ hat jede Teilmenge $X \subseteq A$ nach Definition eines Matchings genau $|X|$ Nachbarn. Es gilt also $|N(X)| \geq |X|$ für alle $X \subseteq A$.

Satz von Hall - Beweis

($\Leftarrow$): Wir zeigen jetzt, falls es gilt $|N(X)| \geq X$ für alle $X \subseteq A$ $(\star)$ dann existiert ein Matching M mit $|M| = |A|$.

Satz von Hall - Beweis

($\Leftarrow$): Wir zeigen jetzt, falls es gilt $|N(X)| \geq X$ für alle $X \subseteq A$ $(\star)$ dann existiert ein Matching M mit $|M| = |A|$.

Das machen wir per Induktion über die Kardinalität von A: $|A| = a$

Satz von Hall - Beweis

($\Leftarrow$): Wir zeigen jetzt, falls es gilt $|N(X)| \geq X$ für alle $X \subseteq A$ $(\star)$ dann existiert ein Matching M mit $|M| = |A|$.

Das machen wir per Induktion über die Kardinalität von A: $|A| = a$

Base Case: $a = 1$ Hier impliziert $(\star)$, dass der einzige Knoten in A zu mindestens einer Kante inzident ist. Diese Kante (od. jede solche Kante falls es mehrere gibt) ist ein Matching.

Satz von Hall - Beweis

($\Leftarrow$): Wir zeigen jetzt, falls es gilt $|N(X)| \geq X$ für alle $X \subseteq A$ $(\star)$ dann existiert ein Matching M mit $|M| = |A|$.

Das machen wir per Induktion über die Kardinalität von A: $|A| = a$

Base Case: $a = 1$ Hier impliziert $(\star)$, dass der einzige Knoten in A zu mindestens einer Kante inzident ist. Diese Kante (od. jede solche Kante falls es mehrere gibt) ist ein Matching.

Induktionsannahme: Für $|A| < a$ gilt $|N(X)| \geq |X|$ für alle $X \subseteq A \Rightarrow \exists M.|M| = |A|$

Satz von Hall - Beweis

Für $a > 1$ machen wir eine Fallunterscheidung:

1. $\forall : \emptyset \neq X \subsetneq A : |X| < |N(X)| \quad (\star)$gilt als strikte Ungleichung
2. $\exists : \emptyset \neq X_0 \subsetneq A : |X| = |N(X)| \quad (\star)$gilt für mind. eine Teilmenge mit Gleichheit

Satz von Hall - Beweis

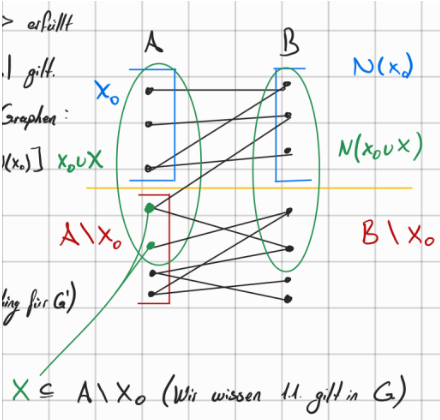
1.Fall: Falls $(\star)$mit strikter Ungleichung gilt dann wählen wir eine beliebige Kante $e = \{x, y\}$ des Graphen, fügen e zum matching hinzu.

1. Wir löschen x, y und alle inzidente Kanten.
2. Sei $G' = G[V \setminus \{x, y\}]$
3. Da $(\star)$in G mit $<$ erfüllt war, ist $(\star)$jetzt auch für G' erfüllt, weil wir nur einen Knoten von B gelöscht haben.
4. Wir benutzen die Induktionsannahme um die Kante e durch ein Matching so ergänzen dass M alle Knoten in A überdeckt.

Satz von Hall - Beweis

2.Fall: Falls $(\star)$nicht für alle Teilmengen mit $>$ erfüllt ist, so existiert eine nichtleere Teilmenge X_0 von A wobei $X_0 \subsetneq A$ für die gilt: $|N(X_0)| = |X_0|$

1. Dann können wir die Induktionsannahme auf beiden induzierten Teilgraphen anwenden. Diese Graphen sind knotendisjunkt: $G' = [X_0 \uplus N(X_0)]$ $G'' = [A \setminus X_0 \uplus B \setminus N(X_0)]$
2. Die Bedingung $(\star)$ist offensichtlich für G' erfüllt da es gilt $|N(X_0)| = |X_0|$.



Satz von Hall - Beweis

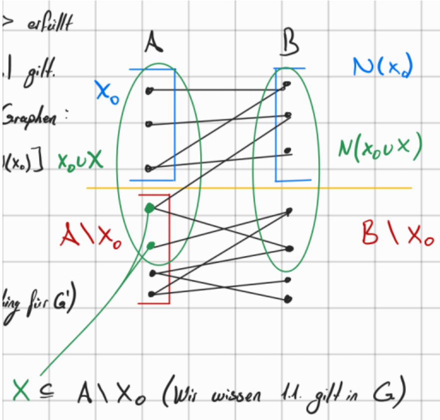
Die Bedingung $(\star)$folgt für G'' aus Folgendem:

3. Sei $X \subseteq A \setminus X_0$ Da $(\star)$für G gilt wissen wir

$$|X| + |X_0| = |X \cup X_0| \overset{((\star) for G)}{\leq} |N(X \cup X_0)|$$
$$= |N(X_0)| + |N(X) \setminus N(X_0)|$$

4. Wegen $|N(X_0)| = |X_0|$ folgt daraus

$$|X| \leq |N(X) \setminus N(X_0)| = |N(X) \cap (B \setminus N(X_0))|.$$



Satz von Hall - Beweis

1. Das heisst die Nachbarschaft von X in dem Graphen G'' besteht aus mindestens $|X|$ Knoten. Da dies für alle Teilmengen gilt, gilt $(\star)$auch für G''.
2. Aus der Induktionsannahme folgt daher: Es gibt ein Matching M' in G', das alle Knoten in X_0 überdeckt, und ein Matching M'' in G'', das alle Knoten in $A \setminus X_0$ überdeckt. $M = M' \cup M''$ ist dann ein Matching in G mit $|M| = |A|$.

$\square$

Exercise: Quantitative Hall's Theorem

For a bipartite graph $G = (A \cup B, E)$, with $|A| = |B| = n$, we define a *deficiency* of G ($\mathrm{deff}(G)$) to be a maximum over $X \subset A$ of $|X| - |N(X)|$. The Hall's theorem states that G has a perfect matching if and only if the deficiency of G is 0. We will show a quantitative version of Hall's theorem, using the Hall's theorem itself.

Exercise: Quantitative Hall's Theorem

Specifically, show that the size of the largest (in terms of the number of edges) matching M in the bipartite graph G is equal to $n - \mathrm{deff}(G)$.

1. Show that if $\mathrm{deff}(G) = k$ then every matching M has size $|M| \leq n - k$. (*Hint: this can be done with a direct argument.*)

Exercise: Quantitative Hall's Theorem

Specifically, show that the size of the largest (in terms of the number of edges) matching M in the bipartite graph G is equal to $n - \mathrm{deff}(G)$.

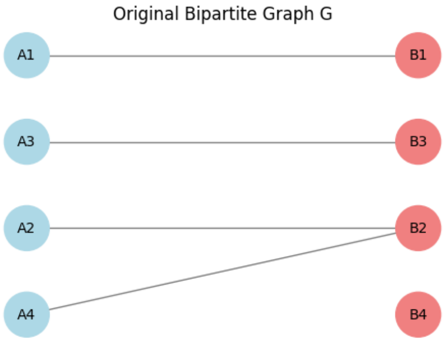
1. Show that if $\mathrm{deff}(G) = k$ then every matching M has size $|M| \leq n - k$. (*Hint: this can be done with a direct argument.*)
2. Show that when $\mathrm{deff}(G) \leq k$, there is a matching M in G of size at least $n - k$.

Exercise: Quantitative Hall's Theorem

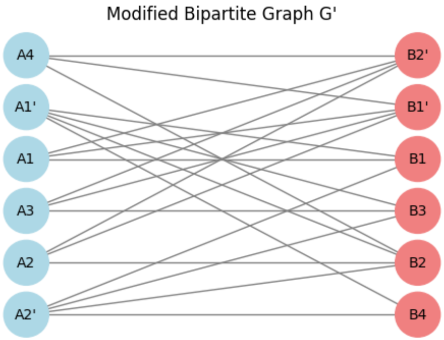
Specifically, show that the size of the largest (in terms of the number of edges) matching M in the bipartite graph G is equal to $n - \text{deff}(G)$.

1. Show that if $\text{deff}(G) = k$ then every matching M has size $|M| \leq n - k$. (*Hint: this can be done with a direct argument.*)
2. Show that when $\text{deff}(G) \leq k$, there is a matching M in G of size at least $n - k$. (*Hint: modify the graph G by adding k vertices on each side, and apply Hall's theorem to the modified graph G'.*)

Visualization of the solution



$\rightarrow$



The End

♠