

Algorithms and Probability

Week 5

G09 - mkilic

19.III.2026

Overview

1. Färbungen
2. Exercise
3. Wahrscheinlichkeit
4. Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Roadmap

1. Graphentheorie

- Zusammenhang
- Kreise
- Matchings
- Färbungen

2. W'keitstheorie

- Bedingte W'keit
- Unabhängigkeit
- (mehrere) Zufallsvariablen
- Diskrete Verteilungen
- Abschätzen von W'keiten
- Randomisierte Algorithmen

3. Algorithmen

- Lange-Bunte Pfade
- MaxFlow
- MinCut
- Kleinster umschliessender Kreis
- Konvexe Hülle

Färbung: Definition

(Knoten-) Färbung

Eine Knotenfärbung eines Graphen $G = (V, E)$ mit k Farben ist eine Abbildung $c : V \rightarrow [k]$, sodass gilt

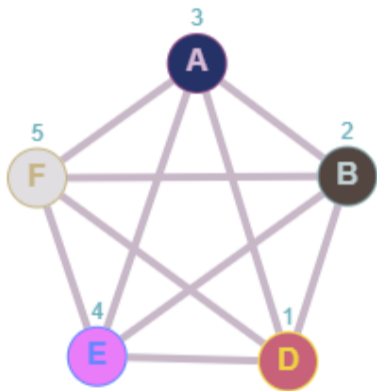
$$c(u) \neq c(v) \text{ für alle Kanten } \{u, v\} \in E.$$

Die *chromatische Zahl* $\chi(G)$ ist die minimale Anzahl Farben, die für eine Knotenfärbung von G benötigt wird.

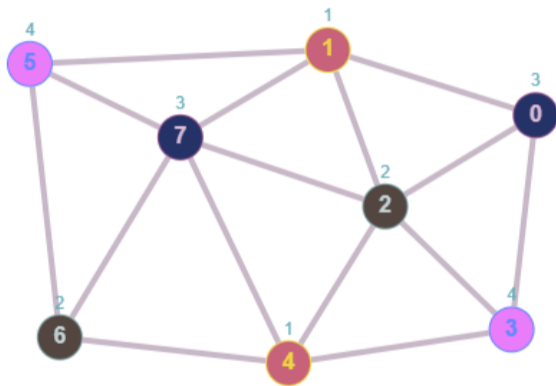
Chromatische Zahl $\chi(G) = k \iff G$ ist k -partit.

⁰Engl. *vertex coloring, chromatic number*

Färbung: Beispiele



Vollständig: $\chi(K_n) = n$



G planar: $\chi(G) \leq 5$

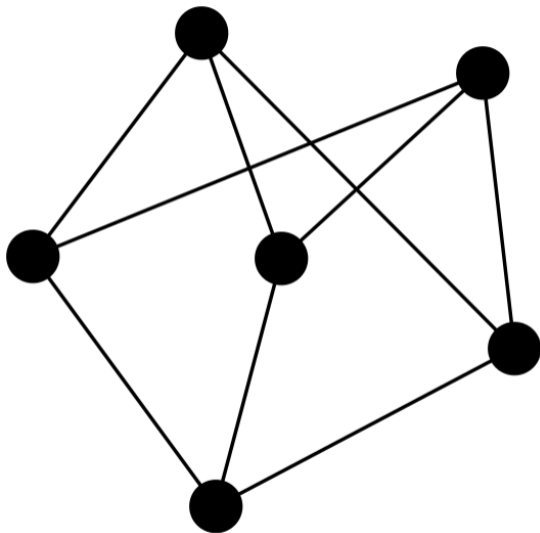
Bipartit Bedingung

Bipartit Bedingung (Satz 1.58.)

Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge als Teilgraphen enthält.

- Kreise ungerader Länge haben chromatische Zahl 3.
- Bipartite Graphen sind 2 färbbar per Definition. Also können keine Kreise ungerader Länge enthalten.
- Die Graphen, die keinen Kreis ungerader Länge enthalten sind bipartit: Starte BFS mit einem beliebigen Knoten. Farbe Knoten nach Parität ihrer Distanz zum Startknoten.

Ist dieser Graph bipartit?



Vierfarbensatz

Vierfarbensatz

Jede Landkarte lässt sich mit vier Farben färben.

Man nimmt an ...

- ... dass das Gebiet eines heden Landes zusammenhngend ist
- ... und dass Länder, die nur in einem einzigen Punkt aneinanderstossen, gleich gefärbt werden dürfen.

Beweis: Theoretisch + Computerprogramm

Greedy Färbung

Go greedy! Wähle beliebige Reihenfolge, für jeden Knoten benutze die *kleinste* Farbe, die unter Nachbarknoten noch nicht aufgetaucht ist.

GREEDY-FÄRBUNG (G)

- 1: wähle eine beliebige Reihenfolge der Knoten: $V = \{v_1, \dots, v_n\}$
 - 2: $c[v_1] \leftarrow 1$
 - 3: **for** $i = 2$ **to** n **do**
 - 4: $c[v_i] \leftarrow \min \{k \in \mathbb{N} \mid k \neq c(u) \text{ für alle } u \in N(v_i) \cap \{v_1, \dots, v_{i-1}\}\}$
-

Greedy: Schlimmster Fall

Algorithmus bestimmt zulässige Färbung per konstruktion. Wie viele Farben werden benutzt?

Schlimmster Fall für einen Knoten v_i : Wenn die Nachbarknoten von v_i schon mit Farben $1, \dots, \deg(v_i)$ gefärbt sind. Dann brauchen wir noch eine Farbe für v_i

Schlimmster Fall für den ganzen Graphen: Falls v_i maximalen Grad hat.

Also braucht der Algorithmus

$$\Delta(G) + 1$$

Farben im schlimmsten Fall wobei

$$\Delta(G) := \text{maximaler Grad eines Knotens in } G$$

Greedy Färbung

Greedy Färbung

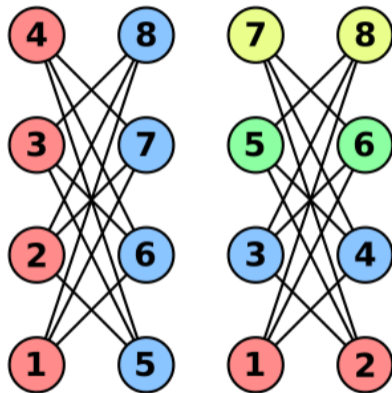
Sei G ein zusammenhängender Graph. Für die Anzahl Farben $C(G)$, die der Algorithmus Greedy-Färbung benötigt, um die Knoten des Graphen G zu färben, gilt

$$\chi(G) \leq C(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Ist der Graph als Adjazenzliste gespeichert, findet der Algorithmus die Färbung in Zeit $O(|E|)$.

- Es gibt immer eine Reihenfolge, bei der der Greedy-Algorithmus mit $\chi(G)$ Farben auskommt.
- Anzahl Farben, die Greedy-Algorithmus braucht, um G zu färben, hängt von der gewählten Reihenfolge der Knoten ab.

Greedy Färbung: Beispiel



Ein bipartiter Graph ist 2-färbbar, jedoch kann Greedy-Algorithmus im schlimmsten Fall deutlich mehr Farben benutzen.

Merkwürdige Beispiele: Bsp 1.62.

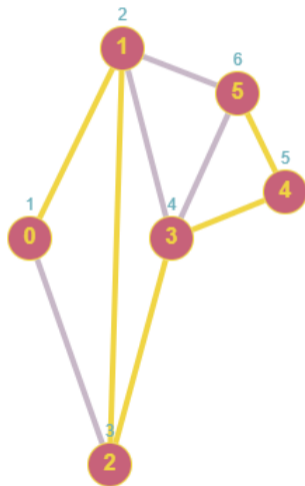
Sei $G = (V, E)$ wobei es einen Knoten $v \in V$ gibt, mit $\deg(v) < \Delta(G)$.

- starte DFS (od. BFS) bei v .
- nummeriere Knoten in umgekehrter Reihenfolge, wie sie vom Algorithmus durchlaufen werden

So hat jeder Knoten v_i mit $i < n$ mindestens einen Nachbarn v_j mit $j > i$ und daher höchstens $\Delta(G) - 1$ gefärbte Nachbarn.

Der Knoten v hat auch meistens $\Delta(G) - 1$ (gefärbte) Nachbarn.

Greedy-Algorithmus kann für diese Reihenfolge höchstens $\Delta(G)$ Farben benutzen.

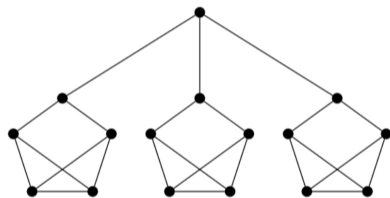


Merkwürdige Beispiele: Bsp 1.63

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender k -regulärer Graph, in dem es mindestens einen Artikulationsknoten gibt.

- finde Art.knoten v in $O(|E|)$
- Seien Zusammenhangskomponenten von $G - v$: $V_1 \dots V_s$
- Die Graphen $G_i = G[V_i \cup \{v\}]$ erfüllen die Annahme von *Beispiel 1.62*.
- Färbe alle solche Subgraphen jeweils mit k Farben
- Stelle sicher dass in allen G_i v die gleiche Farbe hat.

Am Ende haben wir eine k -Färbung.



Bsp: 3-regulär

Satz von Brooks

Satz von Brooks

Ist $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph, der weder vollständig ist noch ein ungerader Kreis ist, also $G \neq K_n$ und $G \neq C_{2n+1}$, so gilt

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

und es gibt einen Algorithmus, der die Knoten des Graphen in Zeit $O(|E|)$ mit $\Delta(G)$ Farben färbt.

Beweis: Benutze Beispiele oben + Fallunterscheidung

Ein Trick: Subgraphen

Satz 1.65.

Ist $G = (V, E)$ ein Graph und $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft, dass jeder induzierte Subgraph von G einen Knoten mit Grad höchstens k enthält, so gilt $\chi(G) \leq k + 1$ und eine $(k + 1)$ -Färbung lässt sich in Zeit $O(|E|)$ finden.

- Das ist unsere Heuristik aus der Vorlesung.
- Nach Annahme gibt es einen Knoten v im Graphen G , der Grad höchstens k hat. Wir beginnen mit diesem Knoten.
- Dann gibt es auch im Graphen $G - v$ einen Knoten der Grad höchstens k hat.
- So nummerieren wir die Knoten. Dann benutzen wir die umgekehrte Reihenfolge.
- Da in dieser Reihenfolge jeder Knoten höchstens k gefärbte Nachbar haben, wenn betrachtet von Greedy-Algorithmus, können wir den Graphen insgesamt mit $k + 1$ Farben färben.

Mycielski-Konstruktion

Mycielski-Konstruktion

Für alle $k \geq 2$ gibt es einen dreiecksfreien Graphen G_k mit $\chi(G_k) \geq k$.

Noch allgemeiner gilt:

Für alle $k, \ell \geq 2$ gibt es Graphen $G_{k,\ell}$, sodass $G_{k,\ell}$ keinen Kreis der Länge höchstens ℓ enthält, aber dennoch gilt: $\chi(G_{k,\ell}) \geq k$.

Mycielski-Konstruktion

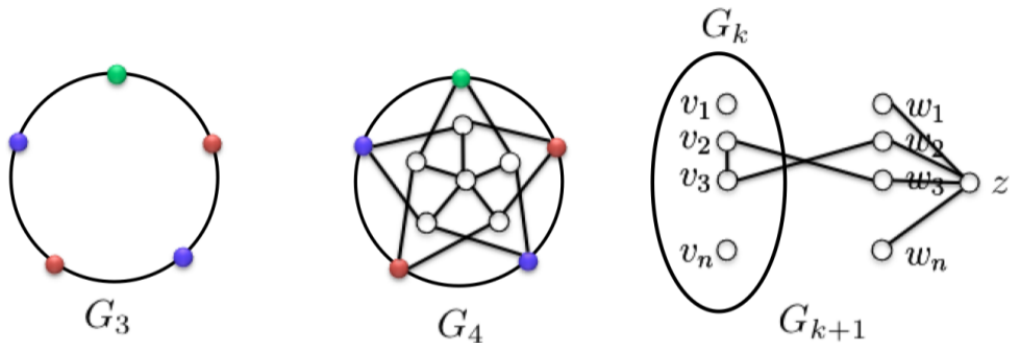


Abbildung 1.17: Die Mycielski-Konstruktion für $k = 3$ und $k = 4$, und die allgemeine Konstruktionsvorschrift von k auf $k + 1$.

3-färbbare Graphen

Wie viele Farben würden wir brauchen, wenn jemand uns versprechen würde, dass der Graph 3-färbbar ist?

Satz 1.67.

Jeden 3-färbbaren Graphen $G = (V, E)$ kann man in Zeit $O(|E|)$ mit $O(\sqrt{|V|})$ Farben färben.

1 Algorithmus:

```
2   WHILE es gibt Knoten  $v$  mit  $> \sqrt{|V|}$  unbefarbte Nachbarn:  
3       farbe  $v$  mit 1 neuer Farbe und  $N(v)$  mit 2 neuen Farben  
4   Farbe restliche Knoten mit Greedy Algorithmus in  $\Delta(G)+1$  Farben  
5
```

Wir können $N(v)$ mit 2 Farben färben weil wir wissen: G ist 3 färbbar. v bekommt eine Farbe, alle Nachbarn müssen einer von anderen zwei Farben haben.

Insgesamt $O(3 \cdot \sqrt{|V|} + \sqrt{|V|} + 1) = O(\sqrt{|V|})$ Farben werden benutzt.

Exercise 3-Colorable Graphs

In the lecture you have seen an algorithm that finds an $O\left(\sqrt{|V|}\right)$ -coloring for every 3-colorable graph (V, E) . Fix $\alpha = \sqrt{|V|}$. The algorithm goes as follows.

1. While there is a vertex v with degree at least α , color v with a new color, color the neighbors of v with two additional new colors, and delete v and all its neighbors from the graph.
2. Color all remaining vertices with at most $\alpha + 1$ colors.

We want to analyze and generalize this algorithm.

- (a) Where in the algorithm do we use that the graph is 3-colorable?
- (b) How many colors do we need at most (depending on α)? Show that for $\alpha = \sqrt{|V|}$ we only need $O\left(\sqrt{|V|}\right)$ colors.

Exercise 3-Colorable Graphs II

- (d) Can you describe an algorithm that finds a $O\left(|V|^{\frac{2}{3}}\right)$ -coloring for every 4 colorable graph?
- (e) Can you describe an algorithm that finds a $O\left(|V|^{\frac{q-2}{q-1}}\right)$ -coloring for every q colorable graph, where $q \geq 2$ is a constant?

Algorithmen und **Wahrscheinlichkeit**

Roadmap

1. Graphentheorie

- Zusammenhang
- Kreise
- Matchings
- Färbungen

2. W'keitstheorie

- Bedingte W'keit
- Unabhängigkeit
- (mehrere) Zufallsvariablen
- Diskrete Verteilungen
- Abschätzen von W'keiten
- Randomisierte Algorithmen

3. Algorithmen

- Lange-Bunte Pfade
- MaxFlow
- MinCut
- Kleinster umschliessender Kreis
- Konvexe Hülle

diskreter Wahrscheinlichkeitsraum

Endlicher diskreter Wahrscheinlichkeitsraum

Ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum ist bestimmt durch eine Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ von Elementarereignissen. Jedem Elementarereignis ω_i ist eine (Elementar-)Wahrscheinlichkeit $Pr[\omega_i]$ zugeordnet, wobei wir fordern, dass $0 \leq Pr[\omega_i] \leq 1$ und

$$\sum_{\omega \in \Omega} Pr[\omega] = 1$$

Wichtig: Einen W'keitsraum ist nur dann komplett wenn man Elementarereignisse und entsprechende Elementarwahrscheinlichkeiten angibt.

⁰Engl. discrete probability space, elementary events, Pr is a function that we call the probability measure
 Ω : sample space

Ereignisse

Ereignis

Eine Menge $E \subseteq \Omega$ heisst *Ereignis*. Die Wahrscheinlichkeit $Pr[E]$ eines Ereignisses ist definiert durch

$$Pr[E] := \sum_{\omega \in E} Pr[\omega]$$

E ein Ereignis, so bezeichnen wir mit $\bar{E} := \Omega \setminus E$ das *Komplementarereignis* zu E .

⁰Engl. *Ereignis*: *Event* — *Komplementarereignis*: *complement of an event*

Konsequenzen aus der Definition

Lemma 2.2.

Für Ereignisse A, B gilt:

1. $Pr[\emptyset] = 0, Pr[\Omega] = 1$
2. $0 \leq Pr[A] \leq 1$
3. $Pr[\bar{A}] = 1 - Pr[A]$
4. Wenn $A \subseteq B$, so folgt $Pr[A] \leq Pr[B]$

Additionssatz

Additionssatz

Wenn die Ereignisse A_1, \dots, A_n **paarweise disjunkt** sind (also wenn für alle Paare $i \neq j$ gilt das $A_i \cap A_j = \emptyset$), so gilt

$$Pr\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] = \sum_{i=1}^n Pr[A_i]$$

Für unendliche Menge von disjunkten Ereignissen A_1, A_2, \dots gilt analog

$$Pr\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} Pr[A_i]$$

Boolesche Ungleichung

Boolesche ungleichung

Für Ereignisse A_1, \dots, A_n gilt

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] \leq \sum_{i=1}^n \Pr[A_i]$$

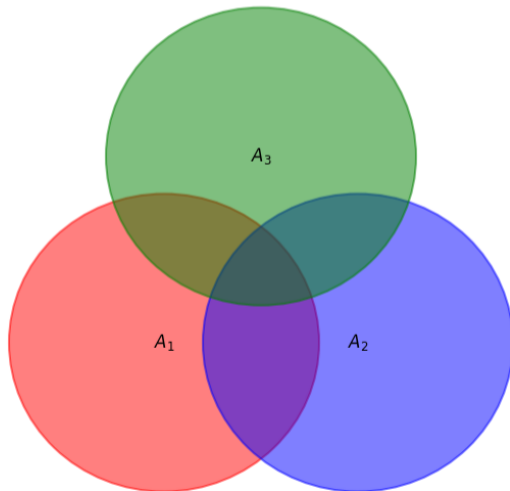
Analog gilt für unendliche Folge von Ereignissen A_1, A_2, \dots dass

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i]$$

⁰Engl. *Boole's inequality* Beweis: im Skript Seite 90

Boolesche Ungleichung Visual

Overlapping Events A_1, A_2, A_3



Siebformel

Inklusion-Exklusion-Prinzip

Satz 2.5. (Siebformel, Prinzip der Inklusion/Exklusion) Für Ereignisse A_1, \dots, A_n ($n \geq 2$) gilt:

$$\begin{aligned} \Pr \left[\bigcup_{i=1}^n A_i \right] &= \sum_{l=1}^n (-1)^{l+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_l}] \\ &= \sum_{i=1}^n \Pr[A_i] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}] - \dots \\ &\quad + (-1)^{n+1} \Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n]. \end{aligned}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit

A und B seien Ereignisse mit $Pr[B] > 0$. Die *bedingte Wahrscheinlichkeit* $Pr[A | B]$ von A gegeben B ist definiert durch

$$Pr[A | B] := \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]}$$

⁰Engl. *Conditional Probability*, $Pr[A|B] := \text{probability of } A \text{ given } B$

Eigenschaften von Bedingte W'keiten

1. $Pr[B | B] = 1$ und $Pr[B | \bar{B}] = 0$
2. $Pr[A | \Omega] = Pr[A]$
3. Die Bedingten W'keiten der Form $Pr[\cdot | E]$ bilden für $E \subseteq \Omega$ und $Pr[E] > 0$ einen neuen W'keitsraum über Ω (Es verhält sich also wie die Funktion $Pr[\cdot]$ z.B. $Pr[A | B] = 1 - Pr[\bar{A} | B]$)

Zweikinderproblem

Problem: Zweikinderproblem

Bei einer Familie mit zwei Kindern, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder der Familie Mädchen sind, wenn wir wissen dass sie mindestens ein Mädchen haben? (Angenommen $Pr[m] = Pr[j] = \frac{1}{2}$)

$\Omega := \{mm, mj, jm, jj\}$

Sei $M := \{mm, mj, jm\}$ und $A := \{mm\}$

Die Frage ist jetzt $Pr[A | M] = ?$

$$Pr[A | M] = \frac{Pr[A \cap M]}{Pr[M]} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Wie ändert sich das Resultat wenn wir wissen „älteres Kind ist ein Mädchen“?

Multiplikationssatz I

Nur eine kleine Umformung von $Pr[A | B] = \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]}$ ergibt

$$Pr[A \cap B] = Pr[B | A] \cdot Pr[A] = Pr[A | B] \cdot Pr[B]$$

Multiplikationssatz

Seien die Ereignisse A_1, \dots, A_n gegeben. Falls $Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] > 0$ ist, gilt

$$Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] = Pr[A_1] \cdot Pr[A_2 | A_1] \cdot Pr[A_3 | A_1 \cap A_2] \cdots Pr[A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}]$$

Multiplikationssatz II

Intuition: Um auszurechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit A und B zugleich eintreten, genügt es, die Wahrscheinlichkeiten zu multiplizieren, dass zunächst A eintritt und dann noch B unter der Bedingung, dass A schon eingetreten ist.

Beweis: Zunächst halten wir fest, dass dieser Ausdruck wohldefiniert ist:

$$Pr[A_1] \geq Pr[A_1 \cap A_2] \geq \dots \geq Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] > 0$$

$$\frac{Pr[A]}{1} \cdot \frac{Pr[A_1 \cap A_2]}{Pr[A_1]} \cdot \frac{Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3]}{Pr[A_1 \cap A_2]} \dots \frac{Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n]}{Pr[A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}]} = Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n]$$

□

Geburtstagsproblem I

Problem: Geburtstagsproblem

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer m -köpfigen Gruppe zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben?

Umformulieren: *Man werfe m Bälle zufällig und gleich wahrscheinlich in $n = 365$ Körbe. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Experiment jeder Ball allein in seinem Korb liegt?*

$A_i :=$ „Ball i landet in einem noch leeren Korb“

Gesucht ist $Pr[A] = Pr[A_1 \cap \dots \cap A_m]$

Multiplikationssatz anwenden:

$$P[A] = Pr[\bigcap_{i=1}^m A_i] = Pr[A_1] \cdot Pr[A_2 | A_1] \cdot Pr[A_3 | A_1 \cap A_2] \cdots Pr[A_m | \bigcap_{i=1}^{m-1} A_i]$$

Geburtstagsproblem II

Problem: Geburtstagsproblem

$Pr[A_j | \cap_{i=1}^{j-1} A_i]$ bezeichnet die W'keit, dass der j -te Ball in einem leeren Korb landet, wenn bereits die vorherigen $j - 1$ Bälle jeweils allein in einem Korb gelandet sind.

$$Pr[A_j | \cap_{i=1}^{j-1} A_i] = \frac{n - (j - 1)}{n} = 1 - \frac{j - 1}{n}$$

$$Pr[A_1 \cap \dots \cap A_m] = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{(m-1)}{n}\right)$$

Man kann die Ungleichung $1 - x \leq e^{-x}$ benutzen und zeigen dass

$$Pr[A] \leq e^{-m(m-1)/(2n)}$$

The End

