Algorithms and Probability

Week 11

G09 - mkilic

7.V.2026

Overview

1. **Exercise: The Probabilistic Method**
2. **Duplikate Finden**
3. **Lange Pfade**
4. **Exercise: Flows**

Roadmap

1. Graphentheorie
   - Zusammenhang
   - Kreise
   - Matchings
   - Färbungen
2. W'keitstheorie
   - Bedingte W'keit
   - Unabhängigkeit
   - (mehrere) Zufallsvariablen
   - Diskrete Verteilungen
   - Abschätzen von W'keiten
   - Randomisierte Algorithmen
3. Algorithmen
   - Lange-Bunte Pfade
   - MaxFlow
   - MinCut
   - Kleinster umschliessender Kreis
   - Konvexe Hülle

The Probabilistic Method

So far, we mainly used randomization to construct efficient algorithms. However, randomization can also be used to prove statements that don't involve randomness themselves. In fact, such proves can usually be phrased by describing a Monte-Carlo algorithm. Answer the two following questions. If you want to, you can describe your solution as a Monte-Carlo algorithm.

(a) You are given 1000 subsets $A_1, \ldots, A_{1000}$ of $\{1, \ldots, n\}$. Each subset has size at least 11. Can the numbers $1, \ldots, n$ be colored 'red' and 'blue', such that each set A_i contain at least one 'red' and at least one 'blue' number?

Duplikate Finden

Duplikate Finden

Gegeben: Ein Datensatz $\mathcal{S} := \{s_1, \ldots, s_n\}$
Gesucht: Duplikate, also alle Paare $1 \leq i < j \leq n$ mit $s_i = s_j$

Hashing

Wir brauchen eine Hashfunktion: $h : U \to [m]$ m ist die Anzahl verfügbaren Hashzellen[1].
Wir haben:

$$\text{für jedes } u \in U, i \in [m] : Pr[h(u) = i] = \frac{1}{m}$$

Wir gehen wie folgt:

1. Berechne $h(u)$ für alle Elemente des Datensatzes
2. Erstelle HashMap mit Einträge $(h(s_i), i)$
3. Sortiere die Elemente bezuglich der ersten Koordinate
4. Vergleiche nur die Einträge auf Gleichheit, die dieselbe erste Koordinate haben

[1] *Manchmal auch 'bucket' genannt.*

Hashing: Erwartete Kollisionen

Kollisionen sind die unerwünschten Duplikate: *"false positives"*
Wir definieren die Bernouilli-Variablen:

$$K_{i,j} = 1 \iff (i,j) \text{ ist eine Kollision}$$

$$Pr[K_{i,j} = 1] = \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{falls } s_i \neq s_j \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{also gilt: } \mathbb{E}[K_{i,j}] \leq \frac{1}{m}$$

$$\text{dann haben wir } \mathbb{E}[\#Kollisionen] = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}[K_{i,j}] \leq \binom{n}{2} \frac{1}{m}$$

Hashing: Fazit

$$\mathbb{E}[\#\text{Kollisionen}] \leq \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{m} < 1 \quad \text{für } m = n^2$$

Mit $m = n^2$ ist der erwartete Mehraufwand durch Kollisionen konstant.

Laufzeit:

- n Berechnungen der Hashfunktion
- $\mathcal{O}(n \log n)$ für Sortieren von $\lceil 2 \log n \rceil$-Bit Zahlen
- $(|\text{Dupl}(\mathcal{D})| + \#\text{Kollisionen})$ Vergleiche zum Finden der Duplikate

Lange Pfade

Wir versuchen lange Pfade zu finden. Es gibt einige Varianten:

- suche längsten Pfad zwischen zwei Knoten
- suche längsten Pfad in dem Graphen
- suche Pfad von einer bestimmten Länge B

Wir interessieren uns für die Entscheidungsvariante von dem Letzteren.

Lange Pfade: Problemstellung

LONG-PATH

Gegeben (G, B), G ein Graph und $B \in \mathbb{N}_0$, stelle fest ob es einen Pfad der Länge B in G gibt.

Lange Pfade: Problemstellung

LONG-PATH

Gegeben (G, B), G ein Graph und $B \in \mathbb{N}_0$, stelle fest ob es einen Pfad der Länge B in G gibt.

Länge eines Pfaden: Ein Pfad der Länge ℓ ist die Folge $\langle v_0, v_1, \ldots, v_\ell \rangle$ mit $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$ für alle $i \in [\ell]$ und *besteht aus* $\ell + 1$ *Knoten.*

LONG-PATH-**Problem ist schwer**

LONG-PATH ist $\mathcal{NP}$ − *Vollständig*. D.h. es existiert keinen (bisher gefundenen) Polynomzeitalgorithmus für LONG-PATH. Folgender Satz sagt warum:

Satz 3.1.

Falls wir LONG-PATH für Graphen mit n Knoten in $t(n)$ Zeit entscheiden können, dann können wir in $t(2n-2)+O(n^2)$ Zeit entscheiden, ob ein Graph mit n Knoten einen Hamiltonkreis hat.

Reduktion auf Hamiltonkreis

- wähle einen beliebigen Knoten v aus
- ersetze alle Kanten inzident zu v: $\{v, w_1\}, \ldots \{v, w_{deg(v)}\}$ durch neue Kanten $\{w'_1, w_1\}, \ldots \{w'_{deg(v)}, w_{deg(v)}\}$
- die w'_i sind neue Knoten und haben $deg(w'_i) = 1$ für alle i.
- Jetzt hat der neue Graph G' genau $n - 1 + deg(v)$ Knoten also maximal $n - 1 + n - 1 = 2n - 2$ wie behauptet [2]

[2] weil max Grad eines Knoten ist $n - 1$

Reduktion auf Hamiltonkreis

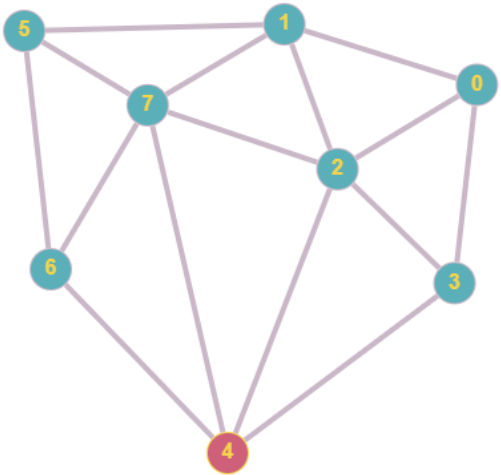
- wähle einen beliebigen Knoten v aus
- ersetze alle Kanten inzident zu v: $\{v, w_1\}, \ldots \{v, w_{deg(v)}\}$ durch neue Kanten $\{w'_1, w_1\}, \ldots \{w'_{deg(v)}, w_{deg(v)}\}$
- die w'_i sind neue Knoten und haben $deg(w'_i) = 1$ für alle i.
- Jetzt hat der neue Graph G' genau $n - 1 + deg(v)$ Knoten also maximal $n - 1 + n - 1 = 2n - 2$ wie behauptet [2]

Wir versuchen zu zeigen:

$$G \text{ hat einen Hamiltonkreis} \iff G' \text{ hat einen Pfad der Länge } n$$

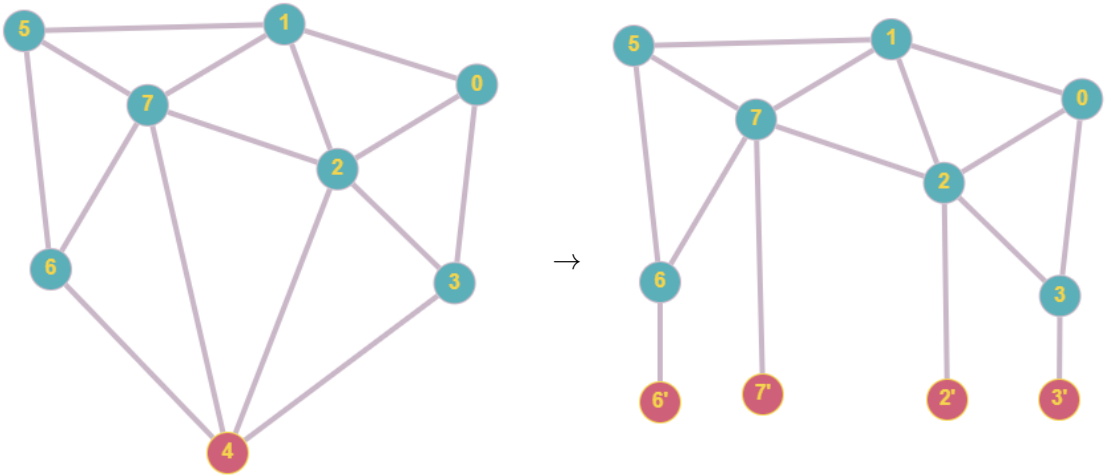
[2] weil max Grad eines Knoten ist $n - 1$

Reduktion auf Hamiltonkreis



$\rightarrow$

Reduktion auf Hamiltonkreis



Reduktion auf Hamiltonkreis

$$G \text{ hat einen Hamiltonkreis} \iff G' \text{ hat einen Pfad der Länge } n$$

$\Rightarrow$ Sei $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1 \rangle$ ein Hamiltonkreis in G. Dann für $v = v_1$ ist $\langle v'_2, v_2, \ldots, v_n, v'_n \rangle$ ein Pfad der Länge n in G'.

$\Leftarrow$ Sei $\langle u_0, u_1, \ldots, u_n \rangle$ ein Pfad der Länge n in G'. Alle Knoten ausser u_0 und u_n haben mindestens Grad 2 also die sind die $n-1$ Knoten aus G. Dann müssen u_0 und u_n zwei verschiedene neue Knoten in G' sein. Wir wissen deshalb dass u_1 und u_{n-1} zu v in G benachbart sind. Also ist

$$\langle v, u_1, \ldots, u_n - 1, v \rangle$$

ein Hamiltonkreis in G.

[2] Die konstruktion von G' aus G geht in $O(n^2)$. Deshalb gilt die Laufzeit aus dem Satz 3.1.

Bunte Pfade & Color Coding

Lange-Pfade-Problem ist schwer. Wie sieht es aus mit B klein im Vergleich zu n wie z.B. $B = \log n$?

Der Algorithmus dafür benutzt eine randomisierte Methode, diese heisst: *Color-coding* Dazu betrachten wir k-gefärbten Graphen. Diese Färbung muss keine *zulässige* Färbung sein. Wir haben eine Abbildung $\gamma : V \to [k]$

[2] *Engl. bunter Pfad: colored path*

Bunte Pfade & Color Coding

Lange-Pfade-Problem ist schwer. Wie sieht es aus mit B klein im Vergleich zu n wie z.B. $B = \log n$?

Der Algorithmus dafür benutzt eine randomisierte Methode, diese heisst: *Color-coding* Dazu betrachten wir k-gefärbten Graphen. Diese Färbung muss keine *zulässige* Färbung sein. Wir haben eine Abbildung $\gamma : V \to [k]$

Bunter Pfad

Ein Pfad in G heisst bunt, wenn alle Knoten auf dem Pfad verschiedene Farben haben.

[2] *Engl. bunter Pfad: colored path*

Bunte Pfade Finden

Bunte Pfade Finden

Jetzt versuchen wir für einen gegebenen Graphen $G = (V, E)$ entscheiden ob es einen bunten Pfad der Länge $k - 1$ gibt.

Bunte Pfade Finden

Bunte Pfade Finden

Jetzt versuchen wir für einen gegebenen Graphen $G = (V, E)$ entscheiden ob es einen bunten Pfad der Länge $k - 1$ gibt.

- Ein bunter Pfad der Länge $k - 1$ benutzt k Farben.

Bunte Pfade Finden

Wir definieren

$$P_i(v) := \left\{ S \in \binom{[k]}{i+1} \,\middle|\, \exists \text{ in } v \text{ endender genau mit } S \text{ gefärbter bunter Pfad} \right\}$$

- $P_i(v)$ ist eine Menge der Mengen von Farben
- $P_i(v)$ enthält $i+1$ Farben
- $P_i(v) \neq \emptyset$ g.d.w. es einen bunten Pfad der Länge i gibt, der in v endet.
- Jede Menge $S \in P_i(v)$ muss $\gamma(v)$, die Farbe von v, enthalten.

Bunte Pfade Finden

Wir suchen einen bunten Pfad der Länge $k-1$:

$$\exists \text{ bunter Pfad der Länge } k-1 \iff \bigcup_{v \in V} P_{k-1}(v) \neq \emptyset$$

Für einen beliebigen Knoten v:

- $P_0(v) = \{\{\gamma(v)\}\}$
- $P_1(v) = \{\{\gamma(x), \gamma(v)\} \mid x \in N(v) \text{ und } \gamma(x) \neq \gamma(v)\}$
- Allgemein:

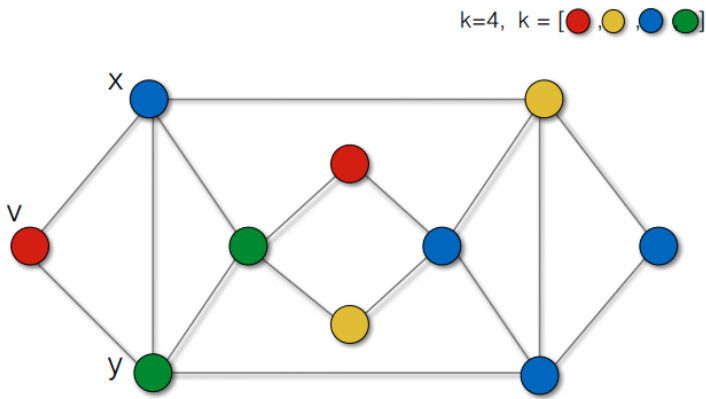
$$P_i(v) = \bigcup_{x \in N(v)} \{R \cup \{\gamma(v)\} \mid R \in P_{i-1}(x) \text{ und } \gamma(v) \notin R\}$$

Bunte Pfade Finden

Algorithm $\textsc{Bunt}(G, i)$

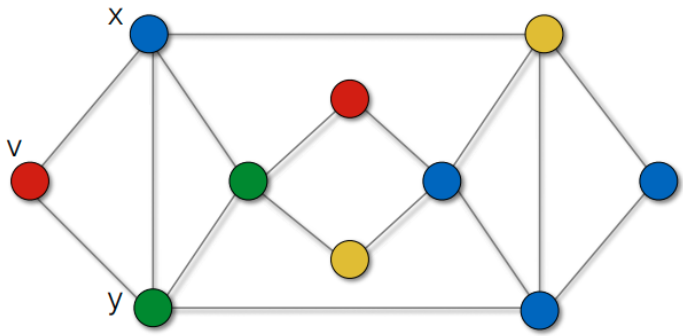
1: **for all** $v \in V$ **do**
2: $\quad P_i(v) \leftarrow \emptyset$
3: $\quad$ **for all** $x \in N(v)$ **do**
4: $\quad\quad$ **for all** $R \in P_{i-1}(x)$ **mit** $\gamma(v) \notin R$ **do**
5: $\quad\quad\quad P_i(v) \leftarrow P_i(v) \cup \{R \cup \{\gamma(v)\}\}$

Beispiel



Beispiel

k=4, k = [, , ,]

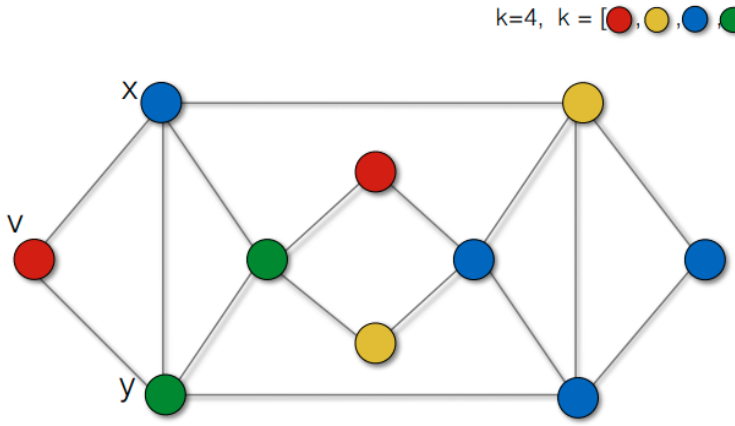


$P_1(v)$ = { { , }, { , } }

$P_1(x)$ = { { , }, { , }, { , } }

$P_1(y)$ = { { , }, { , } }

Beispiel cont'd



Laufzeitanalyse von Bunt(G, i)

- Jede Menge in $P_{i-1}(v)$ hat genau i Elemente.
- Da $P_{i-1}(v) \subseteq \binom{[k]}{i}$ gilt:

$$|P_{i-1}(v)| \leq \binom{k}{i}$$

- In der i-ten Runde wird für jeden Nachbarn $x \in N(v)$ und jede Menge $R \in P_{i-1}(x)$ geprüft, ob $\gamma(v) \notin R$.
- Der Aufwand pro Knoten v ist also:

$$\deg(v) \cdot \binom{k}{i} \cdot i$$

- Gesamtkosten pro Runde:

$$\mathcal{O}\left(\sum_{v \in V} \deg(v) \cdot \binom{k}{i} \cdot i\right) = \mathcal{O}\left(m \cdot \binom{k}{i} \cdot i\right)$$

wobei m die Anzahl der Kanten ist.

Gesamtkosten über alle Runden

- Es gibt $k-1$ Runden (für $i = 1$ bis $k-1$).
- Insgesamt ergibt sich der Aufwand:

$$\mathcal{O}\left(\sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} \cdot i \cdot m\right)$$

- Abschätzung:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} \cdot i \leq \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot i \leq k \cdot 2^k$$

- Damit ergibt sich:

$$\mathcal{O}(2^k \cdot k \cdot m)$$

  Für $k = \mathcal{O}(\log n)$ haben wir einen polynomiellen Algorithmus für bunte Pfade.

Zufallsfärbungen

Wir wollen jetzt wieder entscheiden für einen Graph $G = (V, E)$ ob es in G einen Pfad der Länge B gibt.

Dazu färben wir die Knoten zufälllig mit den $[k]$ Farben, wobei $k = B + 1$ und prüfen ob es einen bunten Pfad der Länge $k - 1$ gibt.

- Wenn es keinen Pfad der Länge $k - 1$ in G gibt, dann werden wir sicher keinen bunten Pfad finden.
- Wenn es einen Pfad der Länge $k - 1$ existiert, können wir Glück haben und in unserer zufälliger Färbung kann dieser Pfad bunt gefärbt sein. Wir können aber auch Pech haben und kein Pfad der Länge $k - 1$ wird bunt gefärbt.

Wir haben **einseitiger Fehler**!

Laufzeitanalyse - Zufallsfärbungen

Wenn G einen Pfad P der Länge $k-1$ enthält, dann gibt es k^k mögliche Färbungn von P. Davon sind $k!$ bunt. Also ist die Erfolgswahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} p_{Erfolg} &:= Pr[\exists \text{ bunter Pfad der Länge } k-1] \\ &\geq Pr[\text{ P ist bunt }] = \frac{k!}{k^k} \geq e^{-k} \end{aligned}$$

Laufzeitanalyse - Zufallsfärbungen

Satz 3.2.

Sei G ein Graph mit einem Pfad der Länge $k-1$.

1. Eine zufällige Färbung mit k Farben erzeugt einen bunten Pfad der Länge $k-1$ mit Wahrscheinlichkeit

$$P_{\text{Erfolg}} \geq e^{-k}.$$

2. Bei wiederholten Färbungen mit k Farben ist der Erwartungswert der Anzahl Versuche, bis man einen bunten Pfad der Länge $k-1$ erhält

$$\frac{1}{P_{\text{Erfolg}}} \leq e^{k}.$$

Algorithmus - lange Pfade

Wir bauen jetzt eine Monte Carlo Algorithmus, der unseren Test höchstens $\lceil \lambda e^k \rceil$ mal wiederholt. Wenn der Algorithmus in so vielen Runden die Bestätigung für einen Pfad der Länge $k-1$ findet, antwortet er `JA`, sonst `NEIN`

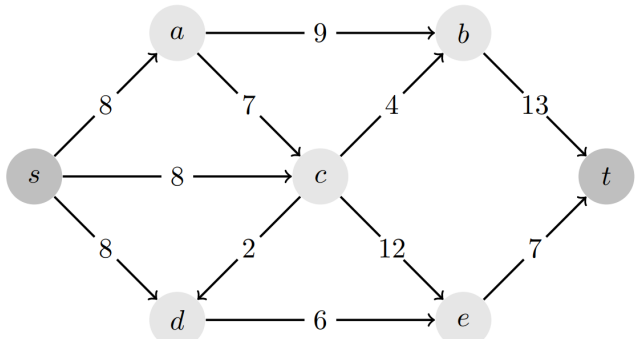
Satz 3.3.

1. Der Algorithmus hat eine Laufzeit von
$$O(\lambda(2e)^k km).$$
2. Antwortet der Algorithmus mit `JA`, dann hat der Graph einen Pfad der Länge $k-1$.
3. Hat der Graph einen Pfad der Länge $k-1$, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Algorithmus mit `NEIN` antwortet, höchstens $e^{-\lambda}$.

[2] Die Angaben aus diesem Satz erhält man durch Satz 2.74 mit $\varepsilon = e^{-k}$ und $\delta = e^{-\lambda}$

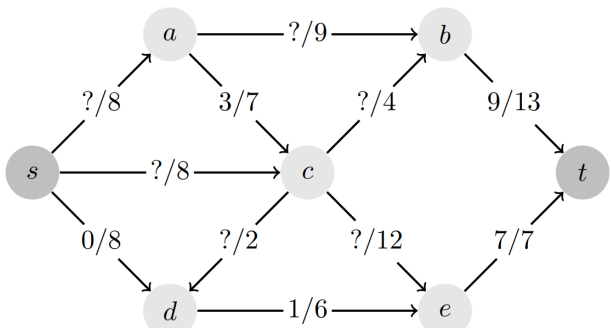
Flows

Consider the following network N. The number at each edge represents its capacity.



Flows

(a) Fill in the missing values so that they form a feasible (not necessarily maximum) flow:



Flows

(b) Construct the residual network ("Restnetzwerk").

(c) Find an augmenting s-t-path and augment the flow along this path. If necessary, repeat this step until you have found a maximum flow.

(d) Prove that your flow is a maximum flow by finding a minimum cut in N.

The End

♠