

Algorithms and Probability

Week 6

G08 - mkilic

27.III.2025

Overview

1. Minitest
2. Bedingte Wahrscheinlichkeiten
3. Unabhängigkeit
4. Zufallsvariablen
5. Erwartungswert
6. Exercises

Roadmap

1. Graphentheorie

- Zusammenhang
- Kreise
- Matchings
- Färbungen

2. W'keitstheorie

- Bedingte W'keit
- Unabhängigkeit
- (mehrere) Zufallsvariablen
- Diskrete Verteilungen
- Abschätzen von W'keiten
- Randomisierte Algorithmen

3. Algorithmen

- Lange-Bunte Pfade
- MaxFlow
- MinCut
- Kleinster umschliessender Kreis
- Konvexe Hülle

Minitest

Passwort: probability

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit

A und B seien Ereignisse mit $Pr[B] > 0$. Die *bedingte Wahrscheinlichkeit* $Pr[A \mid B]$ von A gegeben B ist definiert durch

$$Pr[A \mid B] := \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]}$$

⁰Engl. *Conditional Probability*, $Pr[A|B] := \text{probability of } A \text{ given } B$

Eigenschaften von Bedingte W'keiten

1. $Pr[B \mid B] = 1$ und $Pr[B \mid \bar{B}] = 0$
2. $Pr[A \mid \Omega] = Pr[A]$
3. Die Bedingten W'keiten der Form $Pr[\cdot \mid E]$ bilden für $E \subseteq \Omega$ und $Pr[E] > 0$ einen neuen W'keitsraum über Ω (Es verhält sich also wie die Funktion $Pr[\cdot]$ z.B.
 $Pr[A \mid B] = 1 - Pr[\bar{A} \mid B]$)

Zweikinderproblem

Problem: Zweikinderproblem

Bei einer Familie mit zwei Kindern, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder der Familie Mädchen sind, wenn wir wissen dass sie mindestens ein Mädchen haben? (Angenommen $Pr[m] = Pr[j] = \frac{1}{2}$)

Wie ändert sich das Resultat wenn wir wissen „älteres Kind ist ein Mädchen“?

Zweikinderproblem

Problem: Zweikinderproblem

Bei einer Familie mit zwei Kindern, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder der Familie Mädchen sind, wenn wir wissen dass sie mindestens ein Mädchen haben? (Angenommen $Pr[m] = Pr[j] = \frac{1}{2}$)

$\Omega := \{mm, mj, jm, jj\}$

Sei $M := \{mm, mj, jm\}$ und $A := \{mm\}$

Die Frage ist jetzt $Pr[A \mid M] = ?$

Wie ändert sich das Resultat wenn wir wissen „älteres Kind ist ein Mädchen“?

Zweikinderproblem

Problem: Zweikinderproblem

Bei einer Familie mit zwei Kindern, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder der Familie Mädchen sind, wenn wir wissen dass sie mindestens ein Mädchen haben? (Angenommen $Pr[m] = Pr[j] = \frac{1}{2}$)

$\Omega := \{mm, mj, jm, jj\}$

Sei $M := \{mm, mj, jm\}$ und $A := \{mm\}$

Die Frage ist jetzt $Pr[A \mid M] = ?$

$$Pr[A \mid M] = \frac{Pr[A \cap M]}{Pr[M]} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Wie ändert sich das Resultat wenn wir wissen „älteres Kind ist ein Mädchen“?

Multiplikationssatz I

Nur eine kleine Umformung von $Pr[A | B] = \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]}$ ergibt

$$Pr[A \cap B] = Pr[B | A] \cdot Pr[A] = Pr[A | B] \cdot Pr[B]$$

Multiplikationssatz

Seien die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ gegeben. Falls $Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] > 0$ ist, gilt

$$Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] = Pr[A_1] \cdot Pr[A_2 | A_1] \cdot Pr[A_3 | A_1 \cap A_2] \cdots Pr[A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}]$$

Multiplikationssatz II

Intuition: *Um auszurechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit A und B zugleich eintreten, genügt es, die Wahrscheinlichkeiten zu multiplizieren, dass zunächst A eintritt und dann noch B unter der Bedingung, dass A schon eingetreten ist.*

Beweis: Zunächst halten wir fest, dass dieser Ausdruck wohldefiniert ist:

$$Pr[A_1] \geq Pr[A_1 \cap A_2] \geq \dots \geq Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] > 0$$

$$\frac{Pr[A]}{1} \cdot \frac{Pr[A_1 \cap A_2]}{Pr[A_1]} \cdot \frac{Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3]}{Pr[A_1 \cap A_2]} \dots \frac{Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n]}{Pr[A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}]} = Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n]$$

□

Geburtstagsproblem I

Problem: Geburtstagsproblem

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer m -köpfigen Gruppe zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben?

Geburtstagsproblem I

Problem: Geburtstagsproblem

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer m -köpfigen Gruppe zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben?

Umformulieren: *Man werfe m Bälle zufällig und gleich wahrscheinlich in $n = 365$ Körbe. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Experiment jeder Ball allein in seinem Korb liegt?*

$A_i :=$ „Ball i landet in einem noch leeren Korb“

Gesucht ist $Pr[A] = Pr[A_1 \cap \dots \cap A_m]$

Multiplikationssatz anwenden:

Geburtstagsproblem I

Problem: Geburtstagsproblem

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer m -köpfigen Gruppe zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben?

Umformulieren: *Man werfe m Bälle zufällig und gleich wahrscheinlich in $n = 365$ Körbe. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Experiment jeder Ball allein in seinem Korb liegt?*

$A_i :=$ „Ball i landet in einem noch leeren Korb“

Gesucht ist $Pr[A] = Pr[A_1 \cap \dots \cap A_m]$

Multiplikationssatz anwenden:

$$P[A] = Pr[\cap_{i=1}^m A_i] = Pr[A_1] \cdot Pr[A_2 \mid A_1] \cdot Pr[A_3 \mid A_1 \cap A_2] \cdots Pr[A_m \mid \cap_{i=1}^{m-1} A_i]$$

Geburtstagsproblem II

Problem: Geburtstagsproblem

$Pr[A_j \mid \cap_{i=1}^{j-1} A_i]$ bezeichnet die W'keit, dass der j -te Ball in einem leeren Korb landet, wenn bereits die vorherigen $j - 1$ Bälle jeweils allein in einem Korb gelandet sind.

$$Pr[A_j \mid \cap_{i=1}^{j-1} A_i] = \frac{n - (j - 1)}{n} = 1 - \frac{j - 1}{n}$$

$$Pr[A_1 \cap \dots \cap A_m] = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{(m-1)}{n}\right)$$

Man kann die Ungleichung $1 - x \leq e^{-x}$ benutzen und zeigen dass

$$Pr[A] \leq e^{-m(m-1)/(2n)}$$

Satz von der totalen W'keit

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ seien paarweise disjunkt und es gelte $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$.
Dann folgt

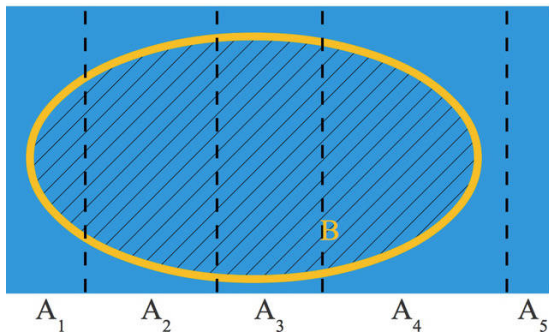
$$Pr[B] = \sum_{i=1}^n Pr[B \mid A_i] \cdot Pr[A_i]$$

Analog gilt für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \dots$ mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, dass

$$Pr[B] = \sum_{i=1}^{\infty} Pr[B \mid A_i] \cdot Pr[A_i]$$

Beweis: Folgt aus $B = (B \cap A_1) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$ und $Pr[B \cap A_i] = Pr[B \mid A_i] \cdot Pr[A_i]$
Weil $(B \cap A_i)$ disjunkt sind, kann man Additionssatz anwenden.

Satz von der totalen W'keit



Monty Hall Problem

Problem: Monty Hall Problem

"Die Kandidatin einer Fernsehshow darf zwischen drei Türen wählen, um ihren Gewinn zu ermitteln. Hinter einer davon befindet sich ein teures Auto, während hinter den beiden anderen als Trostpreis jeweils eine Ziege wartet. Um die Spannung zu steigern, öffnet der Showmaster, nachdem die Kandidatin gewählt hat, eine der beiden übrigen Türen, hinter der sich (wie er weiss) eine Ziege befindet, und bietet der Kandidatin an, die Tür noch einmal zu wechseln. Würden Sie an ihrer Stelle dieses Angebot annehmen?"

Monty Hall Problem

Problem: Monty Hall Problem

"Die Kandidatin einer Fernsehshow darf zwischen drei Türen wählen, um ihren Gewinn zu ermitteln. Hinter einer davon befindet sich ein teures Auto, während hinter den beiden anderen als Trostpreis jeweils eine Ziege wartet. Um die Spannung zu steigern, öffnet der Showmaster, nachdem die Kandidatin gewählt hat, eine der beiden übrigen Türen, hinter der sich (wie er weiss) eine Ziege befindet, und bietet der Kandidatin an, die Tür noch einmal zu wechseln. Würden Sie an ihrer Stelle dieses Angebot annehmen?"

Seien

- $A :=$ „Kandidatin hat bei der ersten Wahl das Auto gewählt“
- $G :=$ „Kandidatin gewinnt nach dem Wechseln der Tür“

Die Frage ist jetzt $Pr[G] = ?$

Monty Hall Problem

Problem: Monty Hall Problem

$Pr[G | A] = 0$ und $Pr[G | \bar{A}] = 1$ (Warum?)

Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit haben wir:

$$Pr[G] = Pr[G | A] \cdot Pr[A] + Pr[G | \bar{A}] \cdot Pr[\bar{A}] = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Es ist also clever, die Tür zu wechseln.

Satz von Bayes

Satz von Bayes

Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ seien paarweise disjunkt. Ferner sei $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$ ein Ereignis mit $Pr[B] > 0$. Dann gilt für ein beliebiges $i = 1, \dots, n$

$$Pr[A_i | B] = \frac{Pr[A_i \cap B]}{Pr[B]} = \frac{Pr[B | A_i] \cdot Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^n Pr[B | A_j] \cdot Pr[A_j]}$$

Man kann mit Hilfe von Satz von Bayes die Reihenfolge der Bedingung umdrehen.

Unabhängigkeit

Unabhängigkeit

Die Ereignisse A und B heissen *unabhängig*, wenn gilt

$$Pr[A \cap B] = Pr[A] \cdot Pr[B]$$

Unabhängigkeit

Unabhängigkeit

Die Ereignisse A und B heissen *unabhängig*, wenn gilt

$$Pr[A \cap B] = Pr[A] \cdot Pr[B]$$

Intuition: Ob B auftritt, hat keinen Einfluss auf die W'keit von A .

Die Ereignisse müssen nicht physikalisch getrennt sein, um stochastisch unabhängig zu sein. (z.B. „Summe der Augenzahlen von zwei Würfeln beträgt 7“)

Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse

Definition 2.22.

Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ heissen *unabhängig*, wenn für alle Teilmengen $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ gilt, dass

$$\Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdots \Pr[A_{i_k}].$$

Eine unendliche Familie von Ereignissen A_i mit $i \in \mathbb{N}$ heisst unabhängig, wenn die obige Gleichung für jede endliche Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse

Lemma 2.23.

Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ sind genau dann unabhängig, wenn für alle $(s_1, \dots, s_n) \in \{0, 1\}^n$ gilt, dass

$$\Pr[A_1^{s_1} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] = \Pr[A_1^{s_1}] \cdots \Pr[A_n^{s_n}],$$

wobei $A_i^0 = \bar{A}_i$ und $A_i^1 = A_i$.

Eigenschaften - Unabhängigkeit

Seien A, B und C unabhängige Ereignisse. Dann gilt:

- $\bar{A}$ und B
- A und $\bar{B}$
- $\bar{A}$ und $\bar{B}$
- $A \cup B$ und C
- $A \cap B$ und C

sind alle unabhängige Ereignisse.

Beweis: In Session.

Zufallsvariablen

Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, wobei Ω die Ergebnismenge eines Wahrscheinlichkeitsraumes ist.

Wir bezeichnen mit W_X den Wertebereich einer Zufallsvariable:

$$W_X := X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega \text{ mit } X(\omega) = x\}$$

⁰Engl. Zufallsvariable : Random Variable

Dichte- und Verteilungsfunktion

Dichtefunktion:

$$f_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], x \mapsto \Pr[X = x]$$

Verteilungsfunktion

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], x \mapsto \Pr[X \leq x]$$

wobei wir haben

$$\Pr[X \leq y] = \sum_{x \in W_X: x \leq y} \Pr[X = x] = \Pr[\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq y\}]$$

Dichte- und Verteilungsfunktion

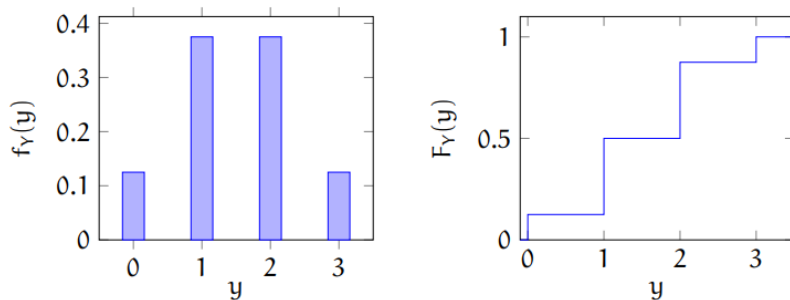


Abbildung 2.3: Dichte- und Verteilungsfunktion von Y .

Erwartungswert

Erwartungswert

Zu einer Zufallsvariablen X definieren wir den *Erwartungswert* $\mathbb{E}[X]$ durch

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x],$$

sofern die Summe absolut konvergiert. Ansonsten sagen wir, dass der Erwartungswert undefiniert ist.

Erwartungswert-2

Ist X eine Zufallsvariable, so gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot Pr[\omega]$$

Erwartungswert

Erwartungswert-3

Ist X eine Zufallsvariable mit $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X \geq i]$$

Beweis. Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr[X = i] = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^i \Pr[X = i] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=j}^{\infty} \Pr[X = i] = \sum_{j=1}^{\infty} \Pr[X \geq j].\end{aligned}$$

Linearität des Erwartungswerts

Der Erwartungswert einer Summe von Zufallsvariablen ist die Summe der Erwartungswerte der Zufallsvariablen.

Linearität des Erwartungswerts

Linearität des Erwartungswerts

Satz 2.33. (*Linearität des Erwartungswerts*) Für Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ und $X := a_1X_1 + \dots + a_nX_n + b$ mit $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = a_1\mathbb{E}[X_1] + \dots + a_n\mathbb{E}[X_n] + b.$$

Exercises

Quiz auf der Webseite!

The End

