

Algorithms and Probability

Week 8

G09 - mkilic

16.IV.2026

Overview

1. Minitest
2. Recap: Wichtige Verteilungen
3. Mehrere Zufallsvariablen
4. Abschätzen von Wahrscheinlichkeiten
5. Exercise - Inequalities
6. Target-Shooting
7. Exercise 2: Cliques and Parties

Roadmap

1. Graphentheorie

- Zusammenhang
- Kreise
- Matchings
- Färbungen

2. W'keitstheorie

- Bedingte W'keit
- Unabhängigkeit
- (mehrere) Zufallsvariablen
- Diskrete Verteilungen
- Abschätzen von W'keiten
- Randomisierte Algorithmen

3. Algorithmen

- Lange-Bunte Pfade
- MaxFlow
- MinCut
- Kleinster umschliessender Kreis
- Konvexe Hülle

Minitest

Passwort: expectation

Recap: Wichtige Verteilungen

Name	Notation	Support	Density	Expectation	Variance
Bernoulli	$\text{Bernoulli}(p)$	$\{0, 1\}$	$f_X(i) = \begin{cases} p & \text{for } i = 1, \\ 1 - p & \text{for } i = 0. \end{cases}$	p	$p(1 - p)$
Binomial	$\text{Bin}(n, p)$	$\{0, 1, \dots, n\}$	$f_X(i) = \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}$	np	$np(1 - p)$
Geometric	$\text{Geo}(p)$	$\{1, 2, 3, \dots\}$	$f_X(i) = p(1 - p)^{i-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson	$\text{Po}(\lambda)$	$\{0, 1, 2, \dots\}$	$f_X(i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!}$	λ	λ

Gemeinsame Dichte und Randdichte

Gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \Pr[X = x, Y = y]$$

"Randdichte von X" (= Dichte von X)

$$f_X(x) = \sum_{y \in \mathcal{W}_Y} f_{X,Y}(x,y) \quad (\text{nach dem Additionssatz})$$

⁰Engl. gemeinsame Dichte: Joint distribution, Randdichte: marginal distribution

Gemeinsame Verteilung und Randverteilung

gemeinsame Verteilung

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x,y) &:= Pr[X \leq x, Y \leq y] = Pr[\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y] \\ &= \sum_{x' \leq x} \sum_{y' \leq y} f_{X,Y}(x', y') \end{aligned}$$

Randverteilung von X

$$F_X(x) = \sum_{x' \leq x} f_X(x) = \sum_{x' \leq x} \sum_{y \in \mathcal{W}_y} f_{X,Y}(x', y)$$

⁰Engl. gem. Verteilung: joint cumulative distr., Randverteilung: marginal cumulative distribution

Bedingte Zufallsvariablen

Bedingte Zufallsvariable

Sei X Zufallsvariable auf \mathcal{W} -raum Ω , $A \subseteq \Omega$ Ereignis mit $\Pr[A] > 0$. Die bedingte Zufallsvariable $X|A$ ist dieselbe Funktion wie X , aber der Definitionsbereich ist auf die Menge A eingeschränkt.

$$f_{X|A} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto \Pr[X = x \mid A]$$

X ist unabhängig von A , falls $f_{X|A} = f_X$.

$$F_{X|A} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto \Pr[X \leq x \mid A]$$

$$\mathbb{E}[X \mid A] := \sum_{x \in \mathcal{W}_X} x \cdot \Pr[X = x \mid A] = \frac{1}{\Pr[A]} \sum_{\omega \in A} X(\omega) \cdot \Pr[\omega]$$

Erinnerung: $X = x$ ist auch ein Ereignis, also " $X = x \subseteq \Omega$ "

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Die Ereignisse $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$ heißen unabhängig, wenn für alle x_1, \dots, x_n die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n unabhängig sind, dh.

$$\Pr[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] \cdots \Pr[X_n = x_n].$$

Aber Viele der Gleichungen sind redundant. Siehe Beispiel in Vorlesungsslides.

Alternativ:

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n)$$

für alle $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{W}_{X_1} \times \cdots \times \mathcal{W}_{X_n}$

Andere Definitionen und Korollare

Lemma 2.53.

Sind X_1, \dots, X_n unabhängige Zufallsvariablen und sind $S_1, \dots, S_n \subseteq \mathbb{R}$ beliebige Mengen, dann gilt

$$Pr[X_1 \in S_1, \dots, X_n \in S_n] = Pr[X_1 \in S_1] \cdot \dots \cdot Pr[X_n \in S_n]$$

Korollar 2.54

Sind X_1, \dots, X_n unabhängige Zufallsvariablen und ist $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq [n]$, dann sind X_{i_1}, \dots, X_{i_k} ebenfalls unabhängig.

Funktionen von Zufallsvariablen

Anwendung einer Funktion f auf eine Zufallsvariable X liefert wieder eine Zufallsvariable $f(X)$. Falls X eine Zufallsvariable ist dann ist z.Bsp. $\sqrt{X^2 + X + 1}$ auch eine Zufallsvariable.

Funktionen und Unabhängigkeit (Satz 2.55.)

Seien f_1, \dots, f_n reellwertige Funktionen ($f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$). Wenn die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n unabhängig sind, dann gilt dies auch für $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$.

Zusammengesetzte Zufallsvariablen

1. Aus Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n \mapsto$ neue Zufallsvariable $Y := g(X_1, \dots, X_n)$
2. Die W'keit " $Y = y$ " berechnet man durch:

$$Pr[Y = y] = Pr[\omega \in \Omega \mid Y(\omega) = y] = Pr[\omega \mid g(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) = y]$$

Beispiel zsm.gesetzter Zufallsvariablen

X und Y bezeichnen die Augenzahl im ersten und zweiten Wurf eines Würfels. Lass uns die Zufallsvariable $Z := X + Y$ betrachten, die selber die Summe der Augenzahlen bezeichnet. Es gilt:

$$Pr[Z = 1] = Pr[\emptyset] = 0, Pr[Z = 3] = Pr[(1, 2), (2, 1)] = \frac{2}{36} \text{ usw.}$$

Summe von Zufallsvariablen

Summe von Zufallsvariablen (Satz 2.58.)

Für zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y sei $Z := X + Y$ Es gilt

$$f_Z(z) = \sum_{x \in \mathcal{W}_X} f_X(x) \cdot f_Y(z - x)$$

Summe von Zufallsvariablen

Summe von Zufallsvariablen (Satz 2.58.)

Für zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y sei $Z := X + Y$. Es gilt

$$f_Z(z) = \sum_{x \in \mathcal{W}_X} f_X(x) \cdot f_Y(z - x)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \Pr[Z = z] = \sum_{x \in \mathcal{W}_X} \Pr[X + Y = z \mid X = x] \cdot \Pr[X = x] \\ &= \sum_{x \in \mathcal{W}_X} \Pr[Y = z - x] \cdot \Pr[X = x] = \sum_{x \in \mathcal{W}_X} f_X(x) \cdot f_Y(z - x). \end{aligned}$$

→ $\text{Bin}(n, p) + \text{Bin}(m, p) = \text{Bin}(n + m, p)$

→ $\text{Poisson}(\lambda_1) + \text{Poisson}(\lambda_2) = \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$

Waldsche Identität

Waldsche Identität

N und X seien zwei unabhängige Zufallsvariablen, wobei für den Wertebereich von N gilt: $W_N \subseteq \mathbb{N}$. Weiter sei

$$Z := \sum_{i=1}^N X_i,$$

wobei X_1, X_2, \dots unabhängige Kopien von X seien. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X].$$

→ Bei $Z := X + Y$ ist die Anzahl summanden konstant. Nun ist sie auch eine Zufallsvariable.

Waldsche Identität

Waldsche Identität

N und X seien zwei unabhängige Zufallsvariablen, wobei für den Wertebereich von N gilt: $W_N \subseteq \mathbb{N}$. Weiter sei

$$Z := \sum_{i=1}^N X_i,$$

wobei X_1, X_2, \dots unabhängige Kopien von X seien. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X].$$

- Bei $Z := X + Y$ ist die Anzahl summanden konstant. Nun ist sie auch eine Zufallsvariable.
- *"Wirf eine Münze bis zum ersten Kopf N -mal. Dann wirf die Münze noch N -mal und notiere mit Z die Anzahl Kopf bei diesen zweiten N -Versuchen. $\mathbb{E}[Z] = ?$ "*

Rechenregeln für Momente

Multiplikatивität des Erwartungswerts

Für unabhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n gilt

$$\mathbb{E}[X_1 \cdot \dots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \dots \cdot \mathbb{E}[X_n]$$

Rechenregeln für Momente

Multiplikativität des Erwartungswerts

Für unabhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n gilt

$$\mathbb{E}[X_1 \cdot \dots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \dots \cdot \mathbb{E}[X_n]$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X \cdot Y] &= \sum_{x \in \mathcal{W}_X} \sum_{y \in \mathcal{W}_Y} xy \cdot \Pr[X = x, Y = y] \\ &\stackrel{\text{Unabh.}}{=} \sum_{x \in \mathcal{W}_X} \sum_{y \in \mathcal{W}_Y} xy \cdot \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = y] \\ &= \sum_{x \in \mathcal{W}_X} x \cdot \Pr[X = x] \sum_{y \in \mathcal{W}_Y} y \cdot \Pr[Y = y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]. \square\end{aligned}$$

Rechenregeln für Momente

Additivität von der Varianz

Für unabhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n und $X := X_1 + \dots + X_n$ gilt

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[X_1] + \dots + \text{Var}[X_n].$$

Rechenregeln für Momente

Additivität von der Varianz

Für unabhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n und $X := X_1 + \dots + X_n$ gilt

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[X_1] + \dots + \text{Var}[X_n].$$

Beweis:

$$\mathbb{E}[(X + Y)^2] = \mathbb{E}[X^2 + 2XY + Y^2] = \mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y^2]$$

$$\mathbb{E}[X + Y]^2 = (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y])^2 = \mathbb{E}[X]^2 + 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y]^2,$$

Ziehe die zweite Gleichung von der Ersten ab:

$$\mathbb{E}[(X + Y)^2] - \mathbb{E}[X + Y]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2. \square$$

Rechenregeln für Momente

$$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] \quad \forall X, Y$$

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] \quad \forall X, Y \text{ unabhängig}$$

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] \quad \forall X, Y \text{ unabhängig}$$

$$\text{Var}[X \cdot Y] \neq \text{Var}[X] \cdot \text{Var}[Y] \quad \text{i.A. (auch für unabhängige ZV)}$$

Die Ungleichung von Markov

Markov's Ungleichung

Sei X eine Zufallsvariable, die nur nicht-negative Werte annimmt. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$, dass

$$\Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}.$$

Oder äquivalent dazu

$$\Pr[X \geq t \cdot \mathbb{E}[X]] \leq \frac{1}{t}.$$

Die Ungleichung von Markov

Markov's Ungleichung

Sei X eine Zufallsvariable, die nur nicht-negative Werte annimmt. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$, dass

$$\Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}.$$

Oder äquivalent dazu

$$\Pr[X \geq t \cdot \mathbb{E}[X]] \leq \frac{1}{t}.$$

Beweis: Weglassen von Summanden in der Definition von $\mathbb{E}[X]$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in \mathcal{W}_X} x \cdot \Pr[X = x] \geq \sum_{x \in \mathcal{W}_X, x \geq t} x \cdot \Pr[X = x] \\ &\geq t \cdot \sum_{x \in \mathcal{W}_X, x \geq t} \Pr[X = x] = t \cdot \Pr[X \geq t] \end{aligned}$$

Die Ungleichung von Chebyshev

Die Ungleichung von Chebyshev

Sei X eine Zufallsvariable und $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$. Dann gilt

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \leq \frac{\text{Var}[X]}{t^2}$$

oder äquivalent dazu $\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\sqrt{\text{Var}[X]}] \leq \frac{1}{t^2}$

Die Ungleichung von Chebyshev

Die Ungleichung von Chebyshev

Sei X eine Zufallsvariable und $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$. Dann gilt

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \leq \frac{\text{Var}[X]}{t^2}$$

oder äquivalent dazu $\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\sqrt{\text{Var}[X]}] \leq \frac{1}{t^2}$

Beweis. Es gilt $\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] = \Pr[(X - \mathbb{E}[X])^2 \geq t^2]$

Die Zufallsvariable $Y := (X - \mathbb{E}[X])^2$ ist nicht-negativ und hat nach Definition der Varianz den Erwartungswert $\mathbb{E}[Y] = \text{Var}[X]$. Damit folgt die Behauptung durch Anwendung der Markov-Ungleichung:

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] = \Pr[Y \geq t^2] \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{t^2} = \frac{\text{Var}[X]}{t^2}.$$

Die Ungleichung von Chernoff

Chernoff-Schranken

Seien X_1, \dots, X_n unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit $\Pr[X_i = 1] = p_i$ und $\Pr[X_i = 0] = 1 - p_i$. Dann gilt für $X := \sum_{i=1}^n X_i$:

- (i) $\Pr[X \geq (1 + \delta)\mathbb{E}[X]] \leq e^{-\frac{1}{3}\delta^2\mathbb{E}[X]}$ für alle $0 < \delta \leq 1$,
- (ii) $\Pr[X \leq (1 - \delta)\mathbb{E}[X]] \leq e^{-\frac{1}{2}\delta^2\mathbb{E}[X]}$ für alle $0 < \delta \leq 1$,
- (iii) $\Pr[X \geq t] \leq 2^{-t}$ für $t \geq 2e\mathbb{E}[X]$.

Präziser als Markov und Chebyshev.

Exercise - Inequalities

We throw 1000 fair coins and denote the results by C_1, \dots, C_{1000} . We want to count the number of neighbouring coins that both show “heads”. Two neighbouring coins are coins of the form C_i, C_{i+1} or C_{1000}, C_1 (imagine the coins being placed on a circle). Let X denote the number of neighbouring coins that both show “heads”. We will use different inequalities to bound the probability that X is significantly larger than its expected value. Make sure to check all relevant conditions before applying an inequality.

- (a) Show that $\mathbb{E}[X] = 250$.
- (b) Use Markov’s inequality to bound $\Pr[X \geq 300]$.
- (c) Compute $\text{Var}[X]$ and use Chebychev’s inequality to bound $\Pr[X \geq 300]$.
- (d) We define Y as the number of neighbouring coins that both show “heads” and for which the first coin has an odd index. That is, we only consider pairs of the form X_{2i-1}, X_{2i} , with $i = 1, \dots, 500$. Show that $\mathbb{E}[Y] = 125$ and use Chernoff’s bound for $\Pr[Y \geq 150]$.
- (e) Use (d) to bound $\Pr[X \geq 300]$.
Remark: Could we just apply Chernoff’s bound right away?

Target-Shooting

Target-Shooting

Target-Shooting

Gegeben: eine endliche Menge U und eine Untermenge $S \subseteq U$ unbekannter Grösse

Gesucht: $\frac{|S|}{|U|} = ?$

Ausserdem haben wir per Annahme die folgenden:

- eine Indikatorfunktion $I_S : U \rightarrow \{0, 1\}$, sodass $I_S(u) = 1$ g.d.w. $u \in S$
- die Möglichkeit Elemente $u \in U$ gleichverteilt zu generieren

Target-Shooting

$|S|/|U|$ approximieren: Für eine wahl von $N > 0$, wähle N Elemente aus U i.i.d. Dann gebe Verhältnis der gefundenen Elemente in S zu N aus.

```
1 Wähle  $u_1, \dots, u_N \in U$  i.i.d.
```

```
2
```

```
3 return  $\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N I_S(u_i)$ 
```

```
4
```

TARGET-SHOOTING

⁰i.i.d. = independent and identically distributed : unabhängig und gleichverteilt

Target-Shooting Analyse

- Definiere Indikatorvariablen $Y_i := I_S(u_i)$.
- $(Y_i)_{i \in \{1, \dots, N\}}$ sind unabhängige Bernoulli-Variablen mit $Pr[Y_i = 1] = \frac{|S|}{|U|}$
- Jetzt können wir die Ausgabe von unserem Algorithmus als eine Zufallsvariable Y schreiben:

$$Y := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_S(u_i)$$

Target-Shooting Analyse

- Definiere Indikatorvariablen $Y_i := I_S(u_i)$.
- $(Y_i)_{i \in \{1, \dots, N\}}$ sind unabhängige Bernoulli-Variablen mit $Pr[Y_i = 1] = \frac{|S|}{|U|}$
- Jetzt können wir die Ausgabe von unserem Algorithmus als eine Zufallsvariable Y schreiben:

$$Y := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_S(u_i)$$

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{|S|}{|U|}$$

unabhängig von der Wahl von N

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y] &= \text{Var}\left[\frac{1}{N} Y'\right] && (Y' \sim \text{Bin}(N, p)) \\ &= \frac{1}{N^2} Np(1-p) \\ &= \frac{1}{N} \left(\frac{|S|}{|U|} - \left(\frac{|S|}{|U|} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

Target-Shooting Analyse

Satz 2.79.

Seien $\delta, \varepsilon > 0$. Falls

$$N \geq 3 \cdot \frac{|U|}{|S|} \cdot \varepsilon^{-2} \cdot \ln \left(\frac{2}{\delta} \right),$$

ist die Ausgabe Y von TARGET-SHOOTING mit Wahrscheinlichkeit mindestens $1 - \delta$ im Intervall

$$\left[(1 - \varepsilon) \frac{|S|}{|U|}, (1 + \varepsilon) \frac{|S|}{|U|} \right].$$

Target-Shooting Analyse

Wir haben $\mathbb{E}[Y] = \frac{|S|}{|U|}$. Wir zeigen also:

$$\Pr[|Y - \mathbb{E}[Y]| \geq \varepsilon \mathbb{E}[Y]] \leq \delta$$

Schreiben wir $Z := \sum_{i=1}^N Y_i = NY$, ist dies äquivalent zu

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}[Z]| \geq \varepsilon \cdot \mathbb{E}[Z]] \leq \delta$$

Da Y_i unabhängige Bernoulli-Variablen sind, können wir die Chernoff-Schranken benutzen.

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}[Z]| \geq \varepsilon \cdot \mathbb{E}[Z]] \leq 2e^{-\varepsilon^2 \frac{\mathbb{E}[Z]}{3}} = 2e^{-\varepsilon^2 N \frac{|S|}{3|U|}}$$

⁰Wir machen kleine Modifizierung für Chernoff-Schranken damit wir die Schranken aus Satz 2.70 (i) und (ii) leichter addieren können. Die Ungleichung ist immer noch gültig.

Target-Shooting Fazit

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}[Z]| \geq \varepsilon \cdot \mathbb{E}[Z]] \leq 2e^{-\varepsilon^2 N \frac{|S|}{3|U|}}$$

Wenn man $N \geq 3 \frac{|U|}{|S|} \cdot \varepsilon^{-2} \cdot \ln(\frac{2}{\delta})$ wählt dann ist diese Wahrscheinlichkeit höchstens δ . \square

Unsere Schranke für N enthält $\frac{|U|}{|S|}$, was wir bestimmen wollen. Man kann dafür eine Schranke einsetzen.

Target-Shooting Beispiel

π – Approximieren

Sei $U = [-1, 1]^2$ und sei $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Dann gilt:

$$\pi = 4 \frac{|S|}{|U|}$$

Wie viele Male müssen wir "schiessen" damit wir π mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit bis auf die 10te Nachkommastelle genau bestimmen?

Target-Shooting Beispiel

π – Aproximieren

Sei $U = [-1, 1]^2$ und sei $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Dann gilt:

$$\pi = 4 \frac{|S|}{|U|}$$

Wie viele Male müssen wir "schiessen" damit wir π mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit bis auf die 10te Nachkommastelle genau bestimmen?

Wähle $\delta = 0.01$ und $\varepsilon = 10^{-10}$. Das heisst man muss

$$N = 3\pi^{-1} \cdot 10^{20} \cdot \ln 200$$

viele Versuche machen.

Exercise 2: Cliques and Parties

[external exercise not from A&W team, solution on website]

At a party, every pair of guests is connected by either a **blue** edge (the two guests know each other) or a **red** edge (they do not). A *monochromatic k -clique* is a set of k guests such that every pair among them shares the same color edge. For good party dynamics, the host wants to avoid any monochromatic clique: no group of k guests should all know each other, and no group of k guests should all be strangers.

Part (a) The host wants to invite $n = 10$ guests. Is it possible to arrange the connections (i.e. to 2-color the edges of K_{10}) such that there is *no* monochromatic 5-clique? Prove your answer, or exhibit an explicit coloring that witnesses it.

Exercise 2: Cliques and Parties

[external exercise not from A&W team, solution on website]

At a party, every pair of guests is connected by either a **blue** edge (the two guests know each other) or a **red** edge (they do not). A *monochromatic k -clique* is a set of k guests such that every pair among them shares the same color edge. For good party dynamics, the host wants to avoid any monochromatic clique: no group of k guests should all know each other, and no group of k guests should all be strangers.

Part (a) The host wants to invite $n = 10$ guests. Is it possible to arrange the connections (i.e. to 2-color the edges of K_{10}) such that there is *no* monochromatic 5-clique?

Prove your answer, or exhibit an explicit coloring that witnesses it.

Part (b) Generalize the setting of Part (a). Given integers $n \geq 1$ and $k \geq 2$, we say that a party of n guests is *k -clique-free* if there exists a 2-coloring of the edges of K_n with no monochromatic k -clique.

The End

